



25. Opérations de base avec des vecteurs

Dans les manuels scolaires, les vecteurs sont habituellement représentés en colonne. C'est pourquoi les exemples des chapitres 25 à 30 sont presque exclusivement calculés avec des vecteurs colonnes, bien que les commandes fonctionnent également pour les vecteurs lignes.

<p>25.1 Saisir et enregistrer un vecteur Vecteur colonne</p> <p>Vecteur ligne</p>	<p>Enregistrer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$:</p> <p>$[2; 3; -6]$ [STO▶] vectcolonne [ENTER] $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$</p> <p>Enregistrer le vecteur (2, 3, -6): $[2, 3, -6]$ [STO▶] vectligne [ENTER] $\rightarrow [2 \ 3 \ -6]$</p> <p> Dans les vecteurs colonnes, les composantes sont séparées par un point-virgule, dans les vecteurs lignes par une virgule.</p>
<p>25.2 Transposer un vecteur ligne en vecteur colonne et inversement</p>	<p>Transposer le vecteur ligne de 25.1 en vecteur colonne et le vecteur colonne en vecteur ligne:</p> <p>vectligne^T [ENTER] $\rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$</p> <p>vectcolonne^T [ENTER] $\rightarrow [2 \ 3 \ -6]$</p> <p>Le symbole ^T est obtenu avec [2nd][MATH] 4 1 .</p>
<p>25.3 Donner les composantes d'un vecteur ...colonne</p> <p>...ligne</p>	<p>Quelle est la troisième composante du vecteur colonne de 25.1? vectcolonne[3, 1] [ENTER] $\rightarrow -6$ L'appendice [3, 1] signifie: 3^{ème} ligne, 1^{ère} colonne</p> <p>Quelle est la troisième composante du vecteur ligne de 25.1? vectligne[1, 3] [ENTER] $\rightarrow -6$ L'appendice [1, 3] signifie: 1^{ère} ligne, 3^{ème} colonne</p>
<p>25.4 Opérations de base avec des vecteurs Somme</p> <p>Différence</p>	<p>Additionner les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$:</p> <p>$[0; 6; -1]+[3; -6; 5]$ [ENTER] $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$</p> <p>Soustraire le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$:</p> <p>$[0; 6; -1]-[3; -6; 5]$ [ENTER] $\rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$</p>

Multiple	Doubler le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$:
Fraction	$2*[0; 6; -1]$ ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$ Calculer le tiers du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: $[3; -6; 5]/3$ ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$
25.5 Norme d'un vecteur	Quelle est la longueur du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$? $\text{norme}([2; 3; -6])$ ENTER $\rightarrow 7$
25.6 Longueur d'un segment AB	Quelle est la distance entre les points A(3, 2, 1) et B(4, -2, 9)? $[3; 2; 1]$ STO► a ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $[4; -2; 9]$ STO► b ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ $\text{norme}(b-a)$ ENTER $\rightarrow 9$  Le recours à la commande norme dans les équations peut poser problème; \rightarrow Problèmes et difficulté, n° 1 plus loin dans ce chapitre.
25.7 Transformer un vecteur en un vecteur unité	Amener le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ à la longueur unité: $\text{vectunit}([2; 3; -6])$ ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}$
25.8 Deux vecteurs ont-ils la même direction ou deux directions opposées?	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ ont-ils la même direction ou deux directions opposées? $[3; 2; -6]./[-6; -4; 12]$ ENTER $\rightarrow \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ Les deux vecteurs sont colinéaires car le vecteur-solution possède trois composantes identiques. Et

	<p>comme la valeur est négative, les deux vecteurs ont des directions opposées.</p> <p>☝ La commande ./ effectue une division composante par composante.</p>
<p>25.9 Décomposer un vecteur</p>	<p>Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$:</p> <p>1^{ère} méthode: Avec équation vectorielle résol(x*[4; 0; 2] + y*[-1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [-6; 0; 0], {x, y, z}) [ENTER] → x=1 and y=3 and z=-1</p> <p>Interprétation: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.</p> <p>2^{ème} méthode: Avec opération matricielle augmente(augmente(augmente([4; 0; 2], [-1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [-6; 0; 0]) [STO] matrice [ENTER] →</p> $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ <p>gausjord(matrice) [ENTER] →</p> $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ <p>Les facteurs recherchés se trouvent dans la dernière colonne: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.</p>
<p>25.10 Déterminer si des vecteurs sont linéairement dépendants ou non</p>	<p>Les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants?</p> <p>Pour le savoir, on exprime le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$. Suivant 25.9 on obtient comme <i>unique</i></p>

combinaison $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, c'est-

à-dire que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants?

Pour le savoir, on exprime le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Suivant 25.9, on obtient:

1^{ère} méthode:

résol(x*[4; 0; 2] + y*[1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z}) **ENTER** → x = -@1 and y = -3.@1 and z = @1

Comme l'indique le symbole @1, ce système d'équations a un nombre infini de solution. Ainsi les vecteurs sont linéairement dépendants.

Une combinaison possible est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2^{ème} méthode:

augmente(augmente(augmente([4; 0; 2], [1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [0; 0; 0]) **STO▶** matrice **ENTER** →

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{gausjord(matrice)} \text{ **ENTER** } \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme la dernière ligne (!) ne contient que des zéros, les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

Problèmes et difficultés

1. Quel point P(x, y) se situe à une distance 5 de chacun des deux points A(-2, 2) et B(5, 1)?

Solution: P₁(1, -2), P₂(2, 5)

25. Opérations de base avec des vecteurs

$$[-2; 2] \text{ [STO] a [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[5; 1] \text{ [STO] b [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[x; y] \text{ [STO] p [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{résol}(\text{norme}(p-a)=5 \text{ and } \text{norme}(p-b)=5, \{x, y\}) \text{ [ENTER] } \rightarrow$$

$$x=1. \text{ and } y=-2.$$

Attention: autres solutions possibles

Seul P_1 est trouvé. Remède: Elever l'équation au carré.

$$\text{résol}(\text{norme}(p-a)^2=25 \text{ and } \text{norme}(p-b)^2=25, \{x, y\}) \text{ [ENTER] } \rightarrow$$

$$x=1 \text{ and } y=-2 \text{ or } x=2 \text{ and } y=5$$

REMARQUE: poss. domaine plus grand

2. Quel point $P(x, y)$ se situe à la même distance r des points $A(5, 7)$, $B(-1, -1)$ et $C(6, 0)$?

$$\text{Solution: } P(2, 3), r=5$$

$$[5; 7] \text{ [STO] a [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$[-1; -1] \text{ [STO] b [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[6; 0] \text{ [STO] c [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[x; y] \text{ [STO] p [ENTER] } \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\text{résol}(\text{norme}(p-a)=r \text{ and } \text{norme}(p-b)=r \text{ and}$$

$$\text{norme}(p-c)=r, \{x, y, r\}) \text{ [ENTER] } \rightarrow$$

$$r = \sqrt{y^2 + 16}. \text{ and } x=2. \text{ and } y=3.$$

Attention: autres solutions possibles

Pour quelle raison r n'est-il pas calculé jusqu'au bout? Curieusement, tout fonctionne à merveille lorsque la distance est désignée par la lettre d :

$$\text{résol}(\text{norme}(p-a)=d \text{ and } \text{norme}(p-b)=d \text{ and}$$

$$\text{norme}(p-c)=d, \{x, y, d\}) \text{ [ENTER] } \rightarrow$$

$$x=2. \text{ and } y=3. \text{ and } d=5.$$

Attention: autres solutions possibles