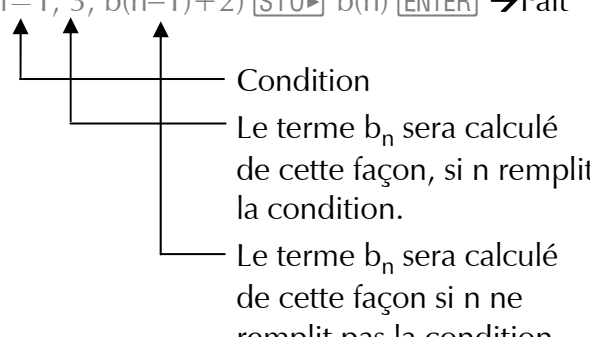
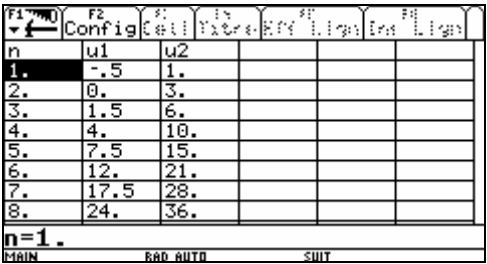
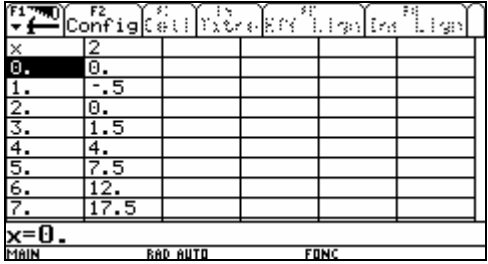
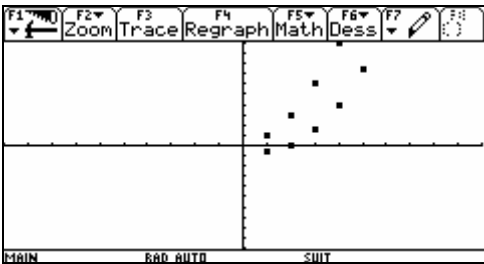




14. Suites, séries et limites

<p>14.1 Définir une suite Définition explicite</p> <p>Définition récursive</p>	<p>Définir une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = 2n + 1$: $2 * n + 1$ [STO] $a(n)$ [ENTER] → Fait</p> <p>Définir une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 1 \\ b_{n-1} + 2, & \text{sinon} \end{cases}$: $\text{when}(n=1, 3, b(n-1)+2)$ [STO] $b(n)$ [ENTER] → Fait</p> 
<p>14.2 Calculer un terme d'une suite préalablement définie un terme</p> <p>plusieurs termes</p>	<p>Calculer le 7ème terme de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $a(7)$ [ENTER] → 15</p> <p>Calculer les termes numéro 3 à 6 de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: 1^{ère} méthode: $a(n) \mid n = \{3, 4, 5, 6\}$ [ENTER] → {7 9 11 13} 2^{ème} méthode: $\text{suite}(a(i), i, 3, 6)$ [ENTER] → {7 9 11 13}</p> <p>☞ Avec une définition récursive, la première méthode conduit souvent à Erreur: Mémoire.</p>
<p>14.3 Définir une suite et en calculer quelques termes</p>	<p>Calculer les termes numéro 3 à 7 de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = 2n + 1$: $\text{suite}(2 * n + 1, n, 3, 7)$ [ENTER] → {7 9 11 13 15}</p>
<p>14.4 Additionner quelques termes ou un nombre infini de termes d'une suite $\sum_{i=1}^n a_i$</p>	<p>Calculer la somme des termes de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $a_i = 2i + 1$, pour i allant de 1 à n: $\Sigma(a(i), i, 1, n)$ [ENTER] → $n^2 + 2 \cdot n$ Le symbole Σ s'obtient au moyen des touches [2nd][Σ] sur la Voyage 200 et des touches [F3]4 sur la TI-89 Titanium.</p> <p>Additionner l'ensemble des termes de la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $c_i = \frac{1}{2^i}$: $\Sigma(1/(2 \wedge i), i, 1, \infty)$ [ENTER] → 1 Le symbole ∞ se trouve au-dessus la touche J sur la Voyage 200 et au-dessus de la touche [CATALOG] sur la TI-89 Titanium.</p>

<p>14.5 Multiplier quelques termes ou un nombre infini de termes d'une suite</p> $\prod_{i=1}^n a_i$	<p>Multiplier les termes de la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $a_i = 2 \cdot i + 1$, pour i allant de 3 à 8: $\Pi(a(i), i, 3, 8)$ [ENTER] \rightarrow 2297295 Le symbole Π s'obtient avec les touches [F3] 5 . Multiplier l'ensemble des termes de la suite $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que $c_i = \frac{1}{2^i}$: $\Pi(1/2 \wedge i, i, 1, \infty)$ [ENTER] \rightarrow 0</p>																											
<p>14.6 Etablir le tableau des valeurs d'une ou plusieurs suite(s)</p> <p>Préparation</p> <p>Définir la ou les suite(s)</p> <p>Déclarer les valeurs de n qui devront apparaître dans le tableau</p> <p>Calculer le tableau</p>	<p>Construire le tableau des valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ et de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie de manière récursive avec $v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ v_{n-1} + n, & \text{sinon} \end{cases}$:</p> <p>1^{ère} méthode (aussi valable pour plusieurs suites):</p> <p>Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des suites: [MODE] Graph ... 4: SUITE [ENTER] (ne doit pas être effectué chaque fois).</p> <p>Pas 2: Définir et sélectionner les suites [◊][Y=] D'éventuelles suites existantes, précédemment définies peuvent être effacées avec [F1] 8 [ENTER] Introduire la suite définie de façon explicite: $u1(n) = n^2/2 - n$ [ENTER] u1 = ne rien donner Introduire la suite définie de façon récursive: $u2(n) = u2(n-1) + n$ [ENTER] u2 = 1 [ENTER] Les suites dont l'équation est précédée d'un ✓ seront calculées. Le symbole ✓ peut être apposé, resp. effacé à l'aide de la touche [↕] resp. [F4].</p> <p>Pas 3: Indiquer les valeurs de n désirées [◊][TblSet] DébutTbl: 1 [↓] Δtbl: 1 [ENTER] [ENTER] (Ces données ne doivent pas être introduites chaque fois).</p> <p>Pas 4: Calculer et afficher le tableau [◊][TABLE] \rightarrow</p>  <table border="1" data-bbox="874 1805 1362 2067"> <thead> <tr> <th>n</th> <th>u1</th> <th>u2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1.</td> <td>-.5</td> <td>1.</td> </tr> <tr> <td>2.</td> <td>0.</td> <td>3.</td> </tr> <tr> <td>3.</td> <td>1.5</td> <td>6.</td> </tr> <tr> <td>4.</td> <td>4.</td> <td>10.</td> </tr> <tr> <td>5.</td> <td>7.5</td> <td>15.</td> </tr> <tr> <td>6.</td> <td>12.</td> <td>21.</td> </tr> <tr> <td>7.</td> <td>17.5</td> <td>28.</td> </tr> <tr> <td>8.</td> <td>24.</td> <td>36.</td> </tr> </tbody> </table> <p>n=1. MAIN RAD AUTO SUIT</p>	n	u1	u2	1.	-.5	1.	2.	0.	3.	3.	1.5	6.	4.	4.	10.	5.	7.5	15.	6.	12.	21.	7.	17.5	28.	8.	24.	36.
n	u1	u2																										
1.	-.5	1.																										
2.	0.	3.																										
3.	1.5	6.																										
4.	4.	10.																										
5.	7.5	15.																										
6.	12.	21.																										
7.	17.5	28.																										
8.	24.	36.																										

Retour à l'écran Home	<p>Les valeurs suivantes sont obtenues avec \odot.</p> <p>Les valeurs de n peuvent être modifiées avec $\boxed{F2}$ comme décrit au pas 3.</p> <p>Voyage 200: \odot \boxed{HOME}</p> <p>TI-89 Titanium: \boxed{HOME}</p>
Préparation	<p>2^{ème} méthode:</p> <p>Calculer quelques termes de la suite $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:</p> <p>Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des fonctions (!)</p> <p>\boxed{MODE} Graph ... 1: FONCTION \boxed{ENTER} (ne doit pas être effectué chaque fois).</p> <p>Pas 2: Indiquer les valeurs de n désirées</p> <p>\odot \boxed{TblSet}</p> <p>DébutTbl: 0 \odot</p> <p>Δtbl: 1 \boxed{ENTER} \boxed{ENTER}</p> <p>(Ces données ne sont pas toujours nécessaires).</p> <p>Pas 3: Produire le tableau</p> <p>table $n^2/2-n, n$ \boxed{ENTER} \rightarrow</p>
Déclarer les valeurs de n qui devront apparaître dans le tableau	
Calculer le tableau	<p>Les valeurs suivantes sont obtenues avec \odot.</p> <p>Les valeurs de n peuvent être modifiées avec $\boxed{F2}$ comme décrit au pas 2.</p> <p>Voyage 200: \odot \boxed{HOME}</p> <p>TI-89 Titanium: \boxed{HOME}</p> <p>\uparrow La commande table $n^2/2-n, n$ ne fonctionne pas, lorsque la mode graphique est activé sur 4: SUITE (\rightarrow Pas 1).</p> <p>3^{ème} méthode (rapide mais ne donne pas de vue d'ensemble):</p> <p>Calculer quelques termes de la suite $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:</p> <p>$n^2/2-n \mid n=\{1, 10, 20, 30, 50\}$ \boxed{ENTER} \rightarrow</p> <p>$\{-1/2 \ 40 \ 180 \ 420 \ 1200\}$</p>
14.7 Représenter une suite graphiquement	<p>Dessiner le graphe de la suite $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ définie explicitement et de la suite $v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ v_{n-1} + n, & \text{sinon} \end{cases}$</p>

Préparation	<p>définie récursivement:</p> <p>Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des suites</p> <p>[MODE] Graph ... 4: SUITE [ENTER] (ne doit pas être effectué chaque fois).</p>
Définir la ou les suite(s)	<p>Pas 2: Définir et sélectionner les suites</p> <p>[◊][Y=]</p> <p>D'éventuelles suites existantes, précédemment définies, peuvent être effacées avec [F1] 8 [ENTER]</p> <p>Introduire la suite définie de façon explicite:</p> <p>$u1(n) = n^{2/2-n}$ [ENTER]</p> <p>ui1 = ne rien donner</p> <p>Introduire la suite définie de façon récursive:</p> <p>$u2(n) = u2(n-1) + n$ [ENTER]</p> <p>ui2 = 1</p> <p>Les suites dont l'équation est précédée d'un ✓ seront calculées. Le symbole ✓ peut être apposé, resp. effacé à l'aide de la touche [↻] resp. [F4].</p>
Dessiner le(s) graphe(s)	<p>Pas 3: Représenter le(s) graphe(s)</p> <p>[◊] [GRAPH] →</p> 
Modification de la portion représentée du graphe	<p>Représenter une autre portion du ou des graphe(s):</p> <p>1^{ère} méthode: [F2]</p> <ol style="list-style-type: none"> 1: Avec les touches [↻] et [ENTER], restreint la portion représentée à un domaine rectangulaire. 2: Représente une portion 4 fois plus petite. 3: Représente une portion 4 fois plus grande. 5: Une unité sur l'axe des n est de la même longueur qu'une unité sur l'axe des u. 6: Représente le domaine par défaut: valeurs de n: 1...10, à partir de n=1 chaque terme de la suite est représenté par un point, valeurs de x: -10...10, 1 marque = 1 unité, valeurs de y (valeurs de u): -10...10, 1 marque = 1 unité. <p>A: Détermine le domaine des y de sorte que le graphe apparaisse entièrement pour le domaine choisi des x.</p> <p>2^{ème} méthode: [◊][WINDOW]</p> <p>La portion à représenter peut également être définie de manière directe, à savoir:</p>

<p>Retour à l'écran Home</p>	<p>nmin: plus petite valeur de n (premier terme de la suite) nmax: plus grande valeur de n (dernier terme de la suite) plotstrt: plus petit n, pour lequel u_n doit être dessiné plotstep: pas de n pour lesquels u_n doit être dessiné xmin: plus petite valeur x xmax: plus grande valeur x xscl: intervalle entre deux marques sur l'axe des x ymin: plus petite valeur y ymax: plus grande valeur y yscl: intervalle entre deux marques sur l'axe des y</p> <p>Voyage 200: \diamond[HOME] TI-89 Titanium: [HOME]</p>
<p>14.8 Rechercher les bornes d'une suite Borne supérieure</p> <p>Borne inférieure</p>	<p>La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = 4 - 2n$ est-elle bornée supérieurement? Le cas échéant, par quelle borne?</p> <p>$4-2*n$ [STO] a(n) [ENTER] → Fait xfmax(a(n), n) n>=1 [ENTER] → n=1 a(n) ans(1) [ENTER] → 2 La suite est bornée supérieurement et 2 est une borne supérieure.</p> <p>La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n = 4 - 2n$ est-elle bornée inférieurement? Le cas échéant, par quelle borne?</p> <p>$4-2*n$ [STO] a(n) [ENTER] → Fait xfmin(a(n), n) n>=1 [ENTER] → n=∞ a(n) ans(1) [ENTER] → -∞ La suite n'est pas bornée inférieurement.</p>
<p>14.9 Calculer la limite d'une suite</p>	<p>$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) = ?$</p> <p>lim(1+(3/4)^n, n, ∞) [ENTER] → 1</p> <p> Les résultats des calculatrices de poche sont à prendre avec précaution; → Problèmes et difficultés, n° 5 et 6.</p> <p> Un résultat undef peut avoir deux significations dans le contexte du calcul de limite:</p> <ul style="list-style-type: none"> - la limite n'existe pas, ou - la calculatrice ne trouve pas la limite.

🌟 Problèmes et difficultés

1. Simplifier:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Solution:

$$\infty, \ln 2, \pi/4, \pi^2/12$$

$$\Sigma(1/k, k, 1, \infty) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)$$

$$\Sigma((-1)^{(k+1)}/k, k, 1, \infty) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k} \right)$$

$$\Sigma((-1)^{k/(2 \cdot k+1)}, k, 0, \infty) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{2 \cdot k + 1} \right)$$

$$\Sigma((-1)^{(k+1)}/k^2, k, 1, \infty) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k^2} \right)$$

Aucune de ces séries ne sera reconnue.

2. $a_n = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$, $a_{k+1} - a_k = ?$

Solution: $\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$

$$\Sigma(1/i, i, n+1, 2 \cdot n) \rightarrow a(n) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

Fait

$$a(k+1) - a(k) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} \left(\frac{1}{i} \right) - \sum_{i=k+1}^{2k} \left(\frac{1}{i} \right)$$

Le terme ne sera pas explicité.

3. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ pour $|v| < 1$ et $0 < v < 1$

Solution: $\frac{1}{1-v}, \frac{1}{1-v}$

$$\Sigma(v^n, n, 0, \infty) \mid v > -1 \text{ and } v < 1 \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v^n)$$

$$\Sigma(v^n, n, 0, \infty) \mid v > 0 \text{ and } v < 1 \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\frac{-1}{v-1}$$

Le premier résultat ne nous avance guère.

4. Simplifier:

$$\sum_{k=0}^{100} c^k \text{ pour } c \neq 1$$

$$\sum_{k=0}^n c^k$$

Le résultat du deuxième problème est aussi valide pour $n=100$.

Solution:

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$$

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$$\Sigma(c^k, k, 0, 100) \mid c \neq 1 \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

$$\Sigma(c^k, k, 0, n) \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} - \frac{1}{c - 1}$$

$$\text{ans}(1) \mid n=100 \text{ [ENTER]} \rightarrow$$

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

Quand donc la somme sera-t-elle effectuée?

Remarque: poss. domaine plus grand

5. Simplifier:

Solution:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, lorsque $n < m$

0

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, lorsque $n > m$

∞

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, lorsque $x = -1$

$\frac{1}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, lorsque $x < -1$

0

a) $\lim(x^n / x^m, x, \infty) \mid n < m$ [ENTER] → undef

b) $\lim(x^n / x^m, x, \infty) \mid n > m$ [ENTER] → undef

c) $\lim(1/(x^{(2*n)}+1), n, \infty) \mid x = -1$ [ENTER] → undef

d) $\lim(1/(x^{(2*n)}+1), n, \infty) \mid x < -1$ [ENTER] → Erreur: Résultat non réel

Remède: on peut essayer de désigner n et m comme @n1 et @n2:

c) $\lim(1/(x^{(2*@n1)}+1), @n1, \infty) \mid x = -1$ [ENTER] → $\frac{1}{2}$

Ce truc ne marche malheureusement pas dans les trois autres exemples.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{20n}\right)^n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{.05 \cdot t}{n}\right)^n$

Solutions: $e^{\frac{t}{20}}$ $e^{0.05t} \approx 1.0513^t$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{.04 \cdot t}{n}\right)^n$

$e^{0.04t} \approx 1.04081^t$

$\lim((1 + (t/20)/n)^n, n, \infty)$ [ENTER] → $e^{\frac{t}{20}}$

$\lim((1 + (0.05*t)/n)^n, n, \infty)$ [ENTER] → 0

Ce résultat est faux.

$\lim((1 + (0.04*t)/n)^n, n, \infty)$ [ENTER] → $(1.04081)^t$

Quand parvient-on à la solution, quand n'y parvient-on pas?