

## 21. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Aufgaben bei 21.1, 21.2, 21.3 und 21.6 können mit Befehlen oder mit einer Vorlage gelöst werden. Weil das Prinzip bei der Lösung mit einer Vorlage immer dasselbe ist, wird es bei den Aufgaben a), b) und c) von 21.1 exemplarisch gezeigt und bei den anderen Aufgaben jeweils nicht mehr ausdrücklich erwähnt.

### 21.1 Binomialverteilung



Die Wahrscheinlichkeit  $p$ , den Ball in den Basketballkorb zu werfen, sei 0.7. Der Ball wird  $n=5$ -mal geworfen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man *genau* 4-mal?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man *genau* 2-mal? *Genau* 3-mal? *Genau* 5-mal?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jede mögliche Trefferzahl auf, d. h. 0 Treffer, 1 Treffer, 2 Treffer, ..., 5 Treffer?

#### 1. Weg: Mit Befehlen

- $\text{binompdf}(5, 0.7, 4)$    $\rightarrow 0.36015$   
 $\underbrace{\quad}_n$     $\underbrace{\quad}_p$
- $\text{binompdf}(5, 0.7, \{2, 3, 5\})$    $\rightarrow \{0.1323, 0.3087, 0.16807\}$
- $\text{binompdf}(5, 0.7)$    $\rightarrow \{0.00243, 0.02835, 0.1323, 0.3087, 0.36015, 0.16807\}$

#### 2. Weg: Mit einer Vorlage

a)


 6 5 A



Menü ausfüllen:

Anz. Versuche, n:           5  
 Wahrscheinlichkeit, p:   0.7  
 X-Wert:                       4  
 OK  $\rightarrow 0.36015$

b)


 6 5 A











Menü ausfüllen:

Anz. Versuche, n:           5  
 Wahrscheinlichkeit, p:   0.7  
 X-Wert:                       {2, 3, 5}  
 OK  $\rightarrow \{0.1323, 0.3087, 0.16807\}$


c)


 6 5 A

|  |   |   |
|--|---|---|
|  |   | <p>  6 5 A</p> <p>Menü ausfüllen:<br/>         Anz. Versuche, n: 5<br/>         Wahrscheinlichkeit, p: 0.7<br/>         X-Wert: (leer lassen)<br/>         OK → {0.00243, 0.02835, 0.1323, 0.3087, 0.36015, 0.16807}</p> <p>d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man (mindestens a=0-mal und) <i>höchstens</i> b=4-mal?<br/>         e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man <i>höchstens</i> 2-mal? <i>Höchstens</i> 4-mal? <i>Höchstens</i> 5-mal?<br/>         f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man mindestens 2-mal und höchstens 4-mal?<br/>         g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man mindestens 2-mal?<br/>         h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jedes der folgenden Ereignisse ein: <i>höchstens</i> (=genau) 0 Treffer, <i>höchstens</i> 1 Treffer, <i>höchstens</i> 2 Treffer, ..., <i>höchstens</i> 5 Treffer?</p> <p>6 5 B d) <math>\text{binomcdf}(5, 0.7, 0, 4)</math> <input type="text" value="Enter"/> → 0.83193<br/> <small style="margin-left: 100px;">n p a b</small></p> <p>6 5 B e) <math>\text{binomcdf}(5, 0.7, \{2, 4, 5\})</math> <input type="text" value="Enter"/> → {0.16308, 0.83193, 1.}</p> <p>6 5 B f) <math>\text{binomcdf}(5, 0.7, 2, 4)</math> <input type="text" value="Enter"/> → 0.80115</p> <p>6 5 B g) <math>\text{binomcdf}(5, 0.7, 2, 5)</math> <input type="text" value="Enter"/> → 0.96922</p> <p>6 5 B h) <math>\text{binomcdf}(5, 0.7)</math> <input type="text" value="Enter"/> → {0.00243, 0.03078, 0.16308, 0.47178, 0.83193, 1.}</p> <p> Die Aufgaben e) und h) können mit der Vorlage nicht direkt gelöst werden.</p> |
| <p><b>21.2 Geometrische Verteilung</b></p> | <p> </p> <p>6 5 H<br/>6 5 H</p> | <p>Die Wahrscheinlichkeit, den Ball in den Basketballkorb zu werfen, sei 0.7.</p> <p>a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man beim 4. Wurf das erste Mal?<br/>         b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man zum ersten Mal beim 2. Versuch? Beim 3. Wurf? Beim 5. Wurf?</p> <p>a) <math>\text{geompdf}(0.7, 4)</math> <input type="text" value="Enter"/> → 0.0189<br/>         b) <math>\text{geompdf}(0.7, \{2, 3, 5\})</math> <input type="text" value="Enter"/> → {0.21, 0.063, 0.00567}</p> <p>c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man (frühestens beim 1. Wurf und) <i>spätestens</i> beim 4. Wurf das erste Mal?<br/>         d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man zum ersten Mal <i>spätestens</i> beim 2. Wurf? <i>Spätestens</i></p>  |

|   |   |  |
|---|---|--|
|   | <p>6 5 I<br/>6 5 I<br/>6 5 I</p>  | <p>beim 3. Wurf? <i>Spätestens</i> beim 5. Wurf?</p> <p>e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erfolgt der erste Treffer frühestens beim 2. und spätestens beim 4. Wurf?</p> <p>c) <code>geomcdf(0.7, 1, 4)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.9919</p> <p>d) <code>geomcdf(0.7, {2, 3, 5})</code> <input type="text" value="Enter"/> → {0.91, 0.973, 0.99757}</p> <p>e) <code>geomcdf(0.7, 2, 4)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.2919</p> <p> Aufgabe d) kann mit der Vorlage nicht direkt gelöst werden.</p>  |
| <p><b>21.3 Poisson-Verteilung</b></p>           | <p><input type="text" value="menu"/> </p> <p>6 5 J<br/>6 5 J</p> <p>6 5 K<br/>6 5 K</p> <p>6 5 K<br/>6 5 K<br/>6 5 K</p> | <p>In einer Notfallzentrale gehen an einem Werktag zwischen 6:00 und 12:00 Uhr im Schnitt 3 Notrufe ein.</p> <p>a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen <i>genau</i> 5 Notrufe ein?</p> <p>b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen <i>genau</i> 2 Notrufe ein? <i>Genau</i> 3 Notrufe? <i>Genau</i> 6 Notrufe?</p> <p>a) <code>poisspdf(3, 5)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.100819</p> <p>b) <code>poisspdf(3, {2, 3, 6})</code> <input type="text" value="Enter"/> → {0.224042, 0.224042, 0.050409}</p> <p>c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen (mindestens 0 und) <i>höchstens</i> 5 Notrufe ein?</p> <p>d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen <i>höchstens</i> 2 Notrufe ein? <i>Höchstens</i> 3 Notrufe? <i>Höchstens</i> 6 Notrufe?</p> <p>e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen <i>mindestens</i> 2 und <i>höchstens</i> 4 Notrufe ein?</p> <p>f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehen <i>mindestens</i> 5 Notrufe (und höchstens 10'000 – eine in der Praxis unmöglich hohe Zahl →) ein? Oder: Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen <i>nicht</i> <i>höchstens</i> 4 Notrufe ein?</p> <p>c) <code>poisscdf(3, 0, 5)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.916082</p> <p>d) <code>poisscdf(3, {2, 3, 6})</code> <input type="text" value="Enter"/> → {0.42319, 0.647232, 0.966491}</p> <p>e) <code>poisscdf(3, 2, 4)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.616115</p> <p>f) <code>poisscdf(3, 5, 10000)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.184737</p> <p><code>1-poisscdf(3, 4)</code> <input type="text" value="Enter"/> → 0.184737</p> <p> Aufgabe d) kann mit der Vorlage nicht direkt gelöst werden.</p> |
| <p><b>21.4 Hypergeometrische Verteilung</b></p> |   | <p>a) Definiere die beiden CAS-Funktionen <code>hyperpdf</code> und <code>hypercdf</code> für die hypergeometrische Verteilung:</p> <p>a) <code>hyperpdf(n, m, r, k) := ncr(m, k) * ncr(n-m, r-k) / ncr(n, r)</code> <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p>   |

|   |  |  |
|---|--|--|
|   |  | <p>hypercdf(n, m, r, k1):=sumseq(hyperpdf(n, m, r, k), k, 0, k1) <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>Unter den 36 Schweizer Jasskarten befinden sich 4 Könige. Bei einem Schieber erhält jede Person 9 Karten.</p> <p>b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält eine bestimmte Person <i>genau</i> 3 Könige?</p> <p>c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält eine bestimmte Person <i>höchstens</i> 3 Könige?</p> <p>d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält eine bestimmte Person <i>mindestens</i> einen und <i>höchstens</i> 3 Könige?</p> <p>e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält eine bestimmte Person <i>mindestens</i> 2 Könige (d. h. <i>nicht höchstens</i> einen König)?</p> <p>b) hyperpdf(36, 4, 9, 3) <input type="text" value="Enter"/> → <math>\frac{36}{935}</math><br/> hyperpdf(36, 4, 9, 3.) <input type="text" value="Enter"/> → 0.038503</p> <p>c) hypercdf(36, 4, 9, 3) <input type="text" value="Enter"/> → <math>\frac{933}{935}</math></p> <p>d) hypercdf(36, 4, 9, 3.) - hypercdf(36, 4, 9, 0) <input type="text" value="Enter"/> → 0.699924</p> <p>e) 1-hypercdf(36, 4, 9, 1.) <input type="text" value="Enter"/> → 0.255157</p> |
| <p><b>21.5 Stetige Gleichverteilung (Rechtecksverteilung)</b></p> |  | <p>a) Definiere die Dichtefunktion derjenigen Rechtecksverteilung, deren x-Werte zwischen a und b liegen können.</p> <p>b) Definiere die Verteilungsfunktion derjenigen Rechtecksverteilung, deren x-Werte zwischen a und b liegen können.</p> <p>c) Definiere die Inverse der Verteilungsfunktion derjenigen Rechtecksverteilung, deren Werte zwischen a und b liegen können.</p> <p>a) rectpdf(x, a, b):=piecewise(0, x&lt;=a, 1/(b-a), x&gt;a and x&lt;b, 0, x&gt;=b) <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>b) rectcdf(x, a, b):=piecewise(0, x&lt;=a, (x-a)/(b-a), x&gt;a and x&lt;b, 1, x&gt;=b) <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>c) invrect(y, a, b):=piecewise(a+(b-a)*y, y&gt;=0 and y&lt;=1, undef, y&lt;0 or y&gt;1) <input type="text" value="Enter"/> → Fertig</p> <p>d) Eine Rechtecksverteilung kann x-Werte zwischen a=2 und b=5 annehmen. Welches ist der Wert der Dichtefunktion an der Stelle x=4? An der Stelle 7?</p> <p>d) rectpdf(<math>\underbrace{4}_x, \underbrace{2}_a, \underbrace{5}_b</math>) <input type="text" value="Enter"/> → <math>\frac{1}{3}</math></p>  |

|                                     |  |   |
|-------------------------------------|--|---|
|                                     |  | <p><math>\text{rectpdf}(7, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow 0</math></p> <p>e) Eine Rechtecksverteilung kann x-Werte zwischen <math>a=2</math> und <math>b=5</math> annehmen. Welches ist der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle <math>x=4</math>? An der Stelle 7?</p> <p>e) <math>\text{rectcdf}(\underbrace{4}_x, \underbrace{2}_a, \underbrace{5}_b) \text{ [Enter]} \rightarrow \frac{2}{3}</math></p> <p><math>\text{rectcdf}(7, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow 1</math></p> <p>Eine Rechtecksverteilung kann x-Werte zwischen <math>a=2</math> und <math>b=5</math> annehmen.</p> <p>f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein Wert <math>x &lt; 3</math> auf?</p> <p>g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein x-Wert zwischen 2.5 und 3.75 auf?</p> <p>h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt ein x-Wert über 4.4 auf?</p> <p>f) <math>\text{rectcdf}(3, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow \frac{1}{3}</math></p> <p>g) <math>\text{rectcdf}(3.75, 2, 5) - \text{rectcdf}(2.5, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow 0.416667</math></p> <p>h) <math>1 - \text{rectcdf}(4.4, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow 0.2</math></p> <p>i) Eine Rechtecksverteilung kann x-Werte zwischen 2 und 5 annehmen. Wo hat die Verteilungsfunktion den Wert 0.75? Den Wert 1.2?</p> <p>i) <math>\text{invrect}(0.75, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow 4.25</math><br/> <math>\text{invrect}(1.2, 2, 5) \text{ [Enter]} \rightarrow \text{undef}</math>,<br/> denn die Verteilungsfunktion kann keine Werte grösser als 1 (oder kleiner als 0) annehmen.</p> |
| <p><b>21.6 Normalverteilung</b></p> | <p></p> <p>6 5 1</p> <p>6 5 1</p> <p>6 5 1</p> <p>6 5 1</p> | <p>a) Welches ist der Funktionswert der Dichtefunktion <math>\varphi_{0, 1}</math> der Standardnormalverteilung an der Stelle <math>x=0</math>? An den Stellen <math>-1, 0.25, 3</math>?</p> <p>a) <math>\text{normpdf}(\underbrace{0}_x, \underbrace{0}_\mu, \underbrace{1}_\sigma) \text{ [Enter]} \rightarrow 0.398942</math></p> <p><math>\text{normpdf}(\{-1, 0.25, 3\}, 0, 1) \text{ [Enter]} \rightarrow \{0.241971, 0.386668, 0.004432\}</math></p> <p>b) Welches ist der Funktionswert der Dichtefunktion <math>\varphi_{3, 2}</math> der Normalverteilung mit Mittelwert <math>\mu=3</math> und Standardabweichung <math>\sigma=2</math> an der Stelle <math>x=0</math>? An den Stellen <math>-1, 0.25, 3</math>?</p> <p>b) <math>\text{normpdf}(\underbrace{0}_x, \underbrace{3}_\mu, \underbrace{2}_\sigma) \text{ [Enter]} \rightarrow 0.064759</math></p> <p><math>\text{normpdf}(\{-1, 0.25, 3\}, 3, 2) \text{ [Enter]} \rightarrow \{0.026995, 0.077506, 0.199471\}</math></p>  |

|  |       |  |
|--|-------|--|
|  | 6 5 2 | <p>c) Welches ist der Funktionswert der Verteilungsfunktion <math>\Phi_{0,1}</math> der Standardnormalverteilung an der Stelle <math>x=0</math>?</p> <p>c) <math>\text{normcdf}(-\infty, \underset{x}{0}, \underset{\mu}{0}, \underset{\sigma}{1})</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.5</math></p>  |
|  | 6 5 2 | <p>d) Welches ist der Funktionswert der Verteilungsfunktion <math>\Phi_{3,2}</math> der Normalverteilung mit Mittelwert <math>\mu=3</math> und Standardabweichung <math>\sigma=2</math> an der Stelle <math>x=0</math>?</p> <p>d) <math>\text{normcdf}(-\infty, \underset{x}{0}, \underset{\mu}{3}, \underset{\sigma}{2})</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.066807</math></p>  |
|  | 6 5 2 | <p>e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei der Standardnormalverteilung (<math>\mu=0, \sigma=1</math>) ein Wert zwischen <math>a=-1</math> und <math>b=+2</math>?</p> <p>f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei der Standardnormalverteilung (<math>\mu=0, \sigma=1</math>) ein Wert bei <i>höchstens</i> <math>-1</math>?</p> <p>g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt bei der Standardnormalverteilung (<math>\mu=0, \sigma=1</math>) ein Wert bei <i>mindestens</i> <math>+2</math>?</p> |
|  | 6 5 2 | <p>e) <math>\text{normcdf}(\underset{a}{-1}, \underset{b}{2}, \underset{\mu}{0}, \underset{\sigma}{1})</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.818595</math></p>   |
|  | 6 5 2 | <p>f) <math>\text{normcdf}(-\infty, -1, 0, 1)</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.158655</math></p>  |
|  | 6 5 2 | <p>g) <math>\text{normcdf}(2, \infty, 0, 1)</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.02275</math></p>   |
|  | 6 5 2 | <p>Das Gewicht von bestimmten Briefumschlägen ist normalverteilt mit dem Mittelwert <math>\mu=9.5</math> g und der Standardabweichung <math>\sigma=0.2</math> g.</p> <p>h) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Briefumschlag zwischen 9.4 g und 9.6 g?</p> <p>i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Briefumschlag <i>höchstens</i> 9 g?</p> <p>j) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Briefumschlag <i>mindestens</i> 10 g?</p>  |
|  | 6 5 2 | <p>h) <math>\text{normcdf}(9.4, 9.6, 9.5, 0.2)</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.382925</math></p>   |
|  | 6 5 2 | <p>i) <math>\text{normcdf}(0, 9, 9.5, 0.2)</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.00621</math></p>  |
|  | 6 5 2 | <p>j) <math>\text{normcdf}(10, \infty, 9.5, 0.2)</math> <input type="text" value="Enter"/> <math>\rightarrow 0.00621</math></p> <p>k) An welcher Stelle <math>x</math> hat die Verteilungsfunktion <math>\Phi_{0,1}</math> der Standardnormalverteilung den Wert 0.75?</p> <p>l) An welcher Stelle <math>x</math> hat die Verteilungsfunktion</p>  |

|  |       |   |
|--|-------|---|
|  |       | $\Phi_{3, 2}$ der Normalverteilung mit Mittelwert $\mu=3$ und Standardabweichung $\sigma=2$ den Wert 0.75?                  |
|  | 6 5 3 | k) $\text{invnorm}(0.75, \underset{\mu}{0}, \underset{\sigma}{1})$ <input type="text" value="Enter"/> $\rightarrow 0.67449$ |
|  | 6 5 3 | l) $\text{invnorm}(0.75, 3, 2)$ <input type="text" value="Enter"/> $\rightarrow 4.34898$                                    |