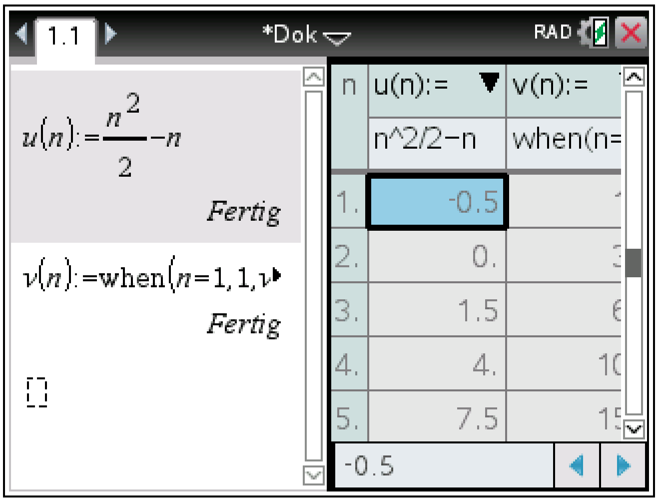
14. Folgen und Reihen, Grenzwerte

14.1 Eine Folge definieren Explizite Definition Rekursive Definition		Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=2n+1$: a(n):=2*n+1 [Enter] → Fertig Definiere die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n=\begin{cases}3, & \text{falls } n=1\\ b_{n-1}+2 & \text{sonst}\end{cases}$: $\text{b(n)} := \text{when}(\underbrace{n=1}_{(1)}, \underbrace{3}_{(2)}, \underbrace{b(n-1)+2}_{(3)})$ [Enter] → Fertig (1) Bedingung (2) So wird b_n berechnet, wenn die Bedingung erfüllt ist. (3) So wird b_n berechnet, wenn die Bedingung *nicht* erfüllt ist.
14.2 Glieder einer vorher definierten Folge berechnen Ein Glied Mehrere Glieder	menu 6 4 5	Berechne das 7. Glied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von 14.1: a(7) [Enter] → 15 Berechne die Glieder mit den Nummern 3 bis 6 der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: **1. Weg:** a(n) | n={3, 4, 5, 6} [Enter] → {7, 9, 11, 13} **2. Weg:** seq(a(i), i, 3, 6) [Enter] → {7, 9, 11, 13} Bei rekursiver Definition kann der erste Weg zu einem Memory-Error führen.
14.3 Eine Folge definieren und einige ihrer Glieder berechnen	menu 6 4 5	Berechne von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n=2n+1$ die Glieder mit den Nummern 3 bis 7: seq(2*n+1, n, 3, 7) [Enter] → {7, 9, 11, 13, 15}
14.4 Glieder einer Folge zusammenzählen Endlich viele Glieder: $\sum_{i=1}^{n} a_i$		Zähle alle Glieder der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i=2i+1$ zusammen, deren Index i zwischen 1 und n liegt: **1. Weg:** Mit dem Befehl sumseq sumseq(a(i), i, 1, n) [Enter] → $n^2+2\cdot n$ **2. Weg:** Mit der Vorlage für das Summenzeichen Σ menu 4 5 4 5 Ausfüllen der Vorlage: 1. Möglichkeit: i ▶ 1 ▲ a(i) ▲ n [Enter] → $n^2+2\cdot n$ 2. Möglichkeit: Die vier leeren Felder der Vorlage

		jeweils anklicken und ausfüllen: $\sum_{i=1}^{n} a(i)$ `Enter` → $n^2+2\cdot n$
Unendlich viele Glieder: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$		Addiere alle (unendlich vielen) Glieder der Folge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $c_i=\frac{1}{2^i}$: **1. Weg:** Mit dem Befehl sumseq sumseq(1/(2^i▶), i, 1, infinity) `Enter` → 1 **2. Weg:** Mit der Vorlage für das Summenzeichen Σ `menu` 4 5 🛠 4 5 Ausfüllen der Vorlage: $\sum_{i=1}^{\infty}$ 1/(2^i▶) `Enter` → 1 Wenn anstatt ^i das Zeichen î erscheint, ist zwischen ^ und i ein Leerschlag zu drücken.
Das Zeichen ∞		Das Zeichen ∞ wird folgendermassen eingegeben: **1. Weg:** infinity **2. Weg:** `π▸` `π▸` `π▸` `Enter` PC: Mausklick rechts / 7: Sonderzeichen… / ∞ durch Doppelklick einfügen Mac: `Ctrl` Mausklick / 7: Sonderzeichen… / ∞ durch Doppelklick einfügen
14.5 Glieder einer Folge multiplizieren Endlich viele Glieder: $\prod_{i=1}^{n} a_i$		Multipliziere alle Glieder der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $a_i=2i+1$, deren Index i zwischen 3 und 8 liegt: **1. Weg:** Mit dem Befehl prodseq prodseq(a(i), i, 3, 8) `Enter` → 2297295 **2. Weg:** Mit der Vorlage für das Produktzeichen Π `menu` 4 6 🛠 4 6 Ausfüllen der Vorlage: 1. Möglichkeit: i ▶ 3 ▲ a(i) ▲ 8 `Enter` → 2297295 2. Möglichkeit: Die vier leeren Felder der Vorlage jeweils anklicken und ausfüllen: $\prod_{i=1}^{n} a(i)$ `Enter` → 2297295

Unendlich viele Glieder: $\prod_{i=1}^{\infty} a_i$	Multipliziere alle (unendlich vielen) Glieder der Folge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $c_i = \frac{1}{2^i}$: **1. Weg:** Mit dem Befehl prodseq prodseq(1/(2^i▶), i, 1, infinity) `Enter` → 0 **2. Weg:** Mit der Vorlage für das Produktzeichen Π `menu` 4 6 4 6 Ausfüllen der Vorlage: $\prod_{i=1}^{\infty} 1/(2\hat{\ }i)$ `Enter` → 0
14.6 Die Wertetabelle für eine oder mehrere Folgen aufstellen **1. Weg:** Gezielt einige Glieder berechnen	Gegeben sei die Folge $(u)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = \frac{n^2}{2} - n$. Berechne das erste, zehnte, zwanzigste, dreissigste und fünfzigste Glied der Folge.: n^2▶/2–n | n={1, 10, 20, 30, 50} `Enter` → {–1/2, 40, 180, 420, 1200}
2. Weg: Mit einer Tabelle	Erzeuge eine Wertetabelle für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ und die rekursiv definierte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = 1 \\ v_{n-1} + n \text{ sonst} \end{cases}$:
Vorbereitung	Die Folgen im Rechenblatt definieren: u(n):=n^2▶/2–n `Enter` → Fertig v(n):=when(n=1, 1, v(n–1)+n) `Enter` → Fertig Ein Tabellenblatt in der rechten Hälfte der Anzeige eröffnen (→ 13.1). Zur Funktionstabelle wechseln: Fahre in das Tabellenblatt, `Ctrl` T.
n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen	`menu` 2 5 2 5 Tabellenanfang: 1 Schrittweite: 1 `Enter`
Tabelle berechnen	Wähle die Folgen aus, für welche die Wertetabelle berechnet werden soll: `menu` 2 3 Wähle mit ▲ und ▼ die Folge u aus, `Enter`. Gehe mit ▶ in die nächste Spalte. Wähle mit ▲

und ▼ die Folge v aus, Enter.



Von der Wertetabelle für v sieht man nur noch den Anfang der beiden Kopfzeilen.

Mit dem Touchpad kann der dargestellte Tabellenausschnitt verändert werden.

2 3

Wähle durch Anklicken die Folge u aus.
Fahre in die nächste Spalte.
Wähle durch Anklicken die Folge v aus.

Mit ▼ und ▲ kann der dargestellte Tabellenausschnitt verändert werden.

Durch Verbreitern des Programmfensters werden auch die Werte der zweiten Folge sichtbar.

Bei Wertetabellen für rekursiv definierte Folgen kann die Meldung „Syntaxfehler: Rekursion zu tief" erscheinen. Dann kann helfen, mit menu 1 1 bzw. 2 5 den Tabellenanfang neu festzulegen.

Spaltenbreite anpassen

Fahre in die gewünschte Spalte, menu 1 1 1.

Bewege mit ▶ und ◀ die rechte Begrenzung der Spalte an die gewünschte Stelle. Enter

Zusätzlicher Weg

Bewege mit der Maus in der obersten Tabellenzeile die rechte Begrenzung der Spalte an die gewünschte Stelle, Mausklick.

14.7 Eine Folge graphisch darstellen

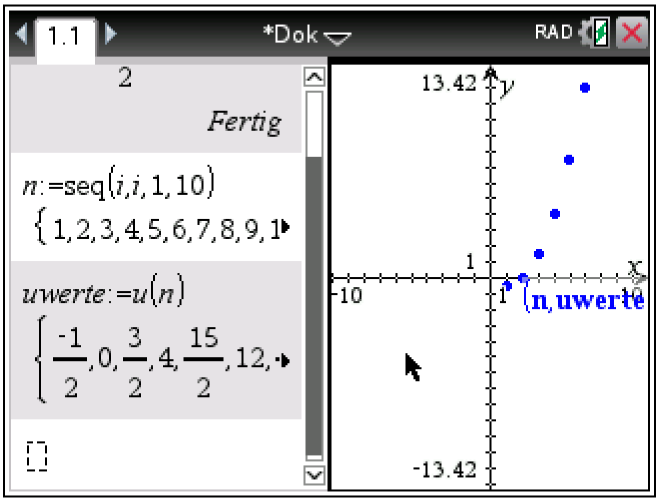
menu

Erzeuge den Graphen für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n=\frac{n^2}{2}-n$. Stelle die ersten 10 Glieder dar:

Folge definieren

Die Folge im Rechenblatt definieren:

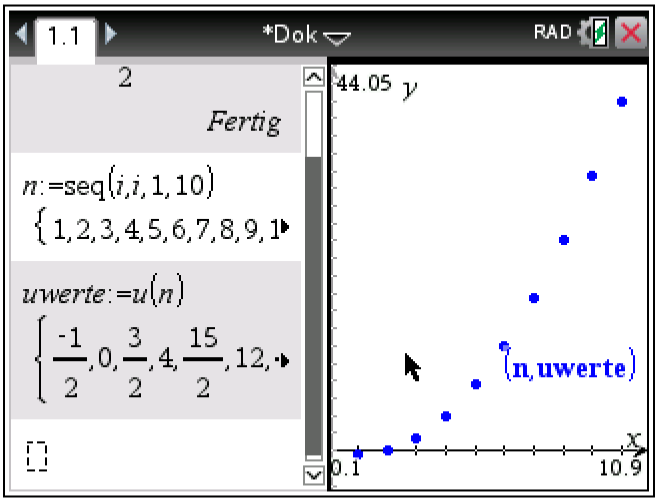
u(n):=n^2▶/2–n Enter → Fertig

Glieder berechnen	6 4 5	Die Glieder mit den Nummern 1 bis 10 berechnen und speichern: n:=seq(i, i, 1, 10) Enter → {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} uwerte:=u(n) Enter → $\left\{\frac{-1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 4, \frac{15}{2}, 12, \frac{35}{2}, 24, \frac{63}{2}, 40\right\}$
Graphikblatt eröffnen		Ein Graphikblatt in der rechten Hälfte der Anzeige eröffnen (→ 13.1, aber beim 4. Schritt ist ein leeres Graphikblatt einzufügen. Dies geschieht beim Rechner mit menu 2, beim Computer durch Anklicken der Option 2:Graphs hinzufügen).
Graph(en) zeichnen		menu 3 6 Wähle für das Feld x← die Variable n aus: Enter, nach Bedarf ▼ bzw. ▲, Enter Fahre mit ▶ auf das Feld y← und wähle dort uwerte aus: Enter, nach Bedarf ▼ bzw. ▲, Enter  Klicke irgendwo ins Graphikblatt, 🛠 3 6 . Wähle für das Feld x← die Variable n aus, für das Feld y← die Variable uwerte.
Eingabezeile ein- und ausblenden		Blende bei Bedarf die Eingabezeile ein und aus: Ctrl G .
Änderung des dargestellten Ausschnittes		Stelle einen anderen Ausschnitt des Graphen dar: → 13.5 Zweckmässig ist hier beispielsweise die Einstellung, bei welcher der Punkt O(0, 0) in der Nähe der Ecke links unten liegt (→ 13.5, 8. Weg). Sinnvoll ist auch die Anpassung an die gegebenen

Werte. Die y-Achse wird automatisch so eingeteilt, dass der Graph für die gewählten n-Werte vollständig angezeigt wird. Bei dieser Einstellung ist eine Einheit auf der x-Achse nicht mehr gleich lang wie eine Einheit auf der y-Achse.

menu 4 9

4 9



14.8 Die Beschränktheit einer Folge untersuchen

menu

Gegen oben

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen oben beschränkt? Welches ist – falls überhaupt vorhanden – eine obere Schranke?

a(n):=4–2*n Enter → Fertig

4 8 — fmax(a(n), n) | n>=1 Enter → n=1

a(n) | ans Enter → 2

Die Folge ist gegen oben beschränkt, und 2 ist eine obere Schranke.

Gegen unten

Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen unten beschränkt? Welches ist – falls überhaupt vorhanden – eine untere Schranke?

a(n):=4–2*n Enter → Fertig

4 7 — fmin(a(n), n) | n>=1 Enter → n=∞

a(n) | ans Enter → –∞

Die Folge ist nicht gegen unten beschränkt.

14.9 Den Grenzwert einer Folge berechnen

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = ?$$

1. Weg:

limit((1/2)^n▸, n, infinity) Enter → 0

2. Weg: Eingabe des Befehls per Vorlage

1. Schritt: Erzeugen der Vorlage für das Grenzwertzeichen:

menu 4 4

			4 4 **2. Schritt:** Ausfüllen der Vorlage: **1. Weg:** n ▶ ∞ ▶ ▶ (1/2) ^ n ▶ [Enter] → 0 **2. Weg:** Drei der vier leeren Felder anklicken und ausfüllen: $\lim_{n\to\infty}(1/2)$ ^ n ▶ [Enter] → 0
			Die Resultate des Rechners sind mit Vorsicht zu geniessen; → Schwierigkeiten und Probleme, Nr. 6.
undef			Das Resultat undef hat bei Grenzwerten zwei verschiedene Bedeutungen: – Der Limes existiert nicht, oder – der Rechner findet den Limes nicht.

Schwierigkeiten und Probleme

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-0.9)^n = ?$

Lösung: $-\dfrac{9}{19} \approx -0.473684$

sumseq((–0.9) ^ n ▶, n, 1, infinity) [Enter] → „Fehler: Nicht-reelles Ergebnis"
Der Grenzwert dieser geometrischen Reihe wird nicht gefunden.

Abhilfe: Gib –0.9 als gewöhnlichen Bruch ein:

sumseq((–9/10) ^ n ▶, n, 1, infinity) [Enter] → $\dfrac{-9}{19}$

Variante: Addiere 1'000 Summanden, um wenigstens einen Näherungswert zu erhalten:

sumseq((–0.9) ^ n ▶, n, 1, 1000) [Enter] → –0.473684

2. a) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k} = ?$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k}}{2k+1} = ?$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2} = ?$

Lösungen:

∞

ln 2

$\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{\pi^2}{12}$

a) sumseq(1/k, k, 1, infinity) [Enter] → $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}\right)$

b) sumseq((–1)^(k+1) ▶/k, k, 1, infinity) Enter → $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k}\right)$

c) sumseq((–1)^k ▶/(2*k+1), k, 0, infinity) Enter → $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{2\cdot k+1}\right)$

d) sumseq((–1)^(k+1) ▶/k^2▶, k, 1, infinity) Enter → $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k^2}\right)$

Keine dieser recht bekannten Reihen wird erkannt.

3. $a_n := \sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$, $a_{k+1}-a_k = ?$

Lösung: $\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k+1}$

a(n):=sumseq(1/i, i, n+1, 2*n) Enter → Fertig

a(k+1)–a(k) Enter → $\sum_{i=k+2}^{2\cdot(k+1)}\left(\frac{1}{i}\right)-\sum_{i=k+1}^{2\cdot k}\left(\frac{1}{i}\right)$

Der Term wird nicht ausgewertet.

4. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty}v^n$

a) für $|v|<1$

b) für $0<v<1$:

Lösungen:

$\frac{1}{1-v}$

$\frac{1}{1-v}$

a) sumseq(v^n ▶, n, 0, infinity)|v>–1 and v<1 Enter → $\sum_{n=0}^{\infty}(v^n)$

b) sumseq(v^n ▶, n, 0, infinity)|v>0 and v<1 Enter → $\frac{-1}{v-1}$

Bei der ersten Aufgabe gelingt die Vereinfachung nicht.

5. Vereinfache:

a) $\sum_{k=0}^{100}c^k$ für $c\neq 1$

b) $\sum_{k=0}^{n}c^k$

c) Werte das Resultat der zweiten Aufgabe aus für n=100.

Lösungen:

$\frac{c^{101}-1}{c-1}$

$\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$

$\frac{c^{101}-1}{c-1}$

a) sumseq(c^k ▶, k, 0, 100) | c≠1 Enter → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

Das Zeichen ≠ wird auf dem Rechner mit ÷ = eingegeben, auf dem PC/Mac mit / =.

b) sumseq(c ^ k ▶, k, 0, n) [Enter] → $\dfrac{c^{n+1}}{c-1}-\dfrac{1}{c-1}$

c) ans | n=100 [Enter] → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

⚠ Definitionsbereich des Ergebnisses kann größer sein als der der Eingabe.

Wann wird die Summe zusammengefasst?

6. m und n sind natürliche Zahlen. Vereinfache:

Lösungen:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{x^m}$, falls n<m — 0

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{x^m}$, falls n>m — ∞

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n}+1}$, falls x= −1 — $\frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n}+1}$, falls x< −1 — 0

a) limit(x ^ n ▶ /x ^ m ▶, x, infinity) | n<m [Enter] → undef

⚠ Beschränkung kann ignoriert werden…

b) limit(x ^ n ▶ /x ^ m ▶, x, infinity) | n>m [Enter] → undef

⚠ Beschränkung kann ignoriert werden…

c) limit(1/(x ^ 2n ▶+1), n, infinity) |x=−1 [Enter] → undef

d) limit(1/(x ^ 2n ▶+1), n, infinity) |x<−1 [Enter] → „Fehler: Nicht-reelles Ergebnis"

Abhilfe: Manchmal hilft es, wenn man m und n überall durch @n1 und @n2 ersetzt:

c) limit(1/(x ^ 2*@n2 ▶+1), @n2, infinity) |x=−1 [Enter] → $\frac{1}{2}$

d) limit(1/(x ^ 2*@n2 ▶+1), @n2, infinity) |x<−1 [Enter] → 0