16. Grundoperationen mit Vektoren

In Schulbüchern werden Vektoren üblicherweise als Spaltenvektoren dargestellt. Darum werden in den Kapiteln 16–18 Beispiele fast ausschliesslich mit Spaltenvektoren gerechnet, obwohl die Befehle sowohl für Zeilen- als auch für Spaltenvektoren funktionieren.

16.1 Einen Vektor eingeben und speichern

Spaltenvektor

Speichere den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$:

1. Weg:

spaltenv:=[2; 3; −6] Enter → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

Eingabe des Strichpunktes

Der Strichpunkt ; wird wie folgt eingegeben:

Mehrmaliges Drücken von ?!▸, dann Enter.

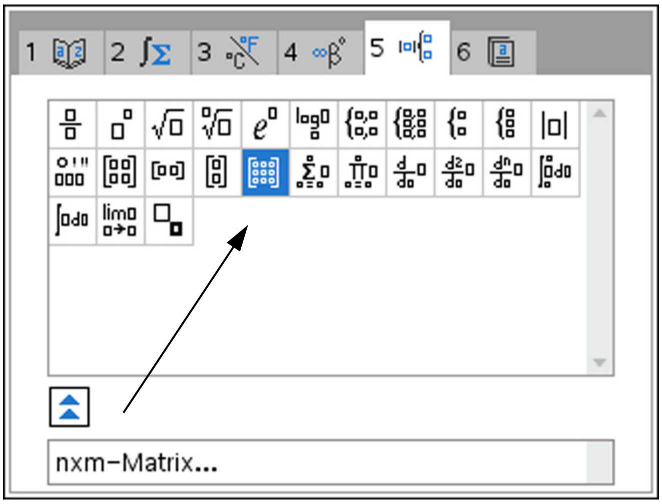
Durch Eingabe von ; auf der Tastatur.

2. Weg:

5

Mathematische Vorlagen

und die Vorlage für eine nxm-Matrix mit dem Pfeil-cursor bzw. dem Mauszeiger doppelt anklicken



und ausfüllen:

Zeilenanzahl 3
Spaltenanzahl 1
OK

2 ▼ 3 ▼ −6 Enter → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

Zeilenvektor		Für Spaltenvektoren mit nur zwei Komponenten steht eine eigene Vorlage zur Verfügung. Sie steht unmittelbar links von der Vorlage für eine nxm-Matrix. Speichere den Vektor [2, 3, –6]: zeilenv:= [2, 3, –6] Enter → [2 3 –6] Beim Spaltenvektor steht zwischen den Komponenten des Vektors ein Strichpunkt, beim Zeilenvektor ein Komma.
16.2 Einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor verwandeln und umgekehrt Das Zeichen ^{T}		Verwandle den Vektor zeilenv aus 16.1 in einen Spaltenvektor und den Vektor spaltenv in einen Zeilenvektor: zeilenv menu 7 2 Enter → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ spaltenv menu 7 2 Enter → [2 3 –6] zeilenv @t Enter → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ spaltenv @t Enter → [2 3 –6] Das Zeichen ^{T} wird mit menu 7 2 oder @t erzeugt.
16.3 Komponenten eines Vektors ansprechen ... eines Spaltenvektors ... eines Zeilenvektors		Welches ist die dritte Komponente des Vektors spaltenv aus 16.1? spaltenv[3, 1] Enter → –6 Der Zusatz [3, 1] bedeutet: 3. Zeile, 1. Spalte Welches ist die dritte Komponente des Vektors zeilenv aus 16.1? zeilenv[1, 3] Enter → –6 Der Zusatz [1, 3] bedeutet: 1. Zeile, 3. Spalte
16.4 Grundoperationen mit Vektoren Summe Differenz		Addiere die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [0; 6; –1]+[3; –6; 5] Enter → $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ Subtrahiere von $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [0; 6; –1]–[3; –6; 5] Enter → $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$

	Vielfaches		Verdopple den Vektor $\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix}$: 2*[0; 6; −1] Enter → $\begin{bmatrix}0\\12\\-2\end{bmatrix}$
	Bruchteil		Drittle den Vektor $\begin{pmatrix}3\\-6\\5\end{pmatrix}$: [3; −6; 5]/3 Enter → $\begin{bmatrix}1\\-2\\5/3\end{bmatrix}$
16.5	**Länge eines Vektors**	menu 🛠 7 7 1	Wie lang ist der Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$? norm([2; 3; −6]) Enter → 7
16.6	**Länge der Strecke AB**	menu 🛠 7 7 1	Welches ist der Abstand der Punkte A(3, 2, 1) und B(4, −2, 9)? a:=[3; 2; 1] Enter → $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ b:=[4; −2; 9] Enter → $\begin{bmatrix}4\\-2\\9\end{bmatrix}$ norm(b–a) Enter → 9
16.7	**Einen Vektor auf Länge 1 strecken / stauchen**	menu 🛠 7 C 1	Stauche den Vektor $\begin{pmatrix}2\\3\\-6\end{pmatrix}$ auf Länge 1: unitv([2; 3; −6]) Enter → $\begin{bmatrix}2/7\\3/7\\-6/7\end{bmatrix}$
16.8	**Haben zwei Vektoren gleiche / entgegengesetzte Richtung?**		Haben die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-6\\-4\\12\end{pmatrix}$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung? [3; 2; −6]./[−6; −4; 12] Enter → $\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\-1/2\end{bmatrix}$ Die Antwort ist ja, weil der Resultatvektor dreimal dieselbe Zahl enthält. Und da diese Zahl negativ ist, haben die Vektoren entgegengesetzte Richtung.

Der Befehl ./ führt eine komponentenweise Division durch.

16.9 Einen Vektor zerlegen

menu

Zerlege den Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$:

1. Weg: Mit direkter Eingabe der Vektoren

3 1 solve(x*[4; 0; 2] + y*[–1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [–6; 0; 0], {x, y, z}) `Enter` → x=1 and y=3 and z=–1

Interpretation: $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.

2. Weg: Mit vorheriger Speicherung der Vektoren

d:=[–6; 0; 0] `Enter` → $\begin{bmatrix}-6\\0\\0\end{bmatrix}$

a:=[4; 0; 2] `Enter` → $\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$

b:=[–1; 2; 1] `Enter` → $\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$

c:=[7; 6; 5] `Enter` → $\begin{bmatrix}7\\6\\5\end{bmatrix}$

3 1 solve(x*a+y*b+z*c=d, {x, y, z}) `Enter` → x=1 and y=3 and z=–1

Interpretation: $\vec{d}=1\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}+(-1)\cdot\vec{c}$.

16.10 Abklären, ob Vektoren linear unabhängig sind oder nicht

menu

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 16.9 findet man:

	3 1	solve(x*[4; 0; 2] + y*[–1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z}) Enter → x=0 and y=0 and z=0. Weil x=y=z=0 die *einzige* Lösung dieses Gleichungssystems ist, sind die drei Vektoren linear unabhängig. Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ linear abhängig oder linear unabhängig? Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 16.9 findet man:
	3 1	solve(x*[4; 0; 2] + y*[1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z}) Enter → x= –***c1*** and y= –3· ***c1*** and z= ***c1*** Wie man am Symbol ***c1*** erkennt, hat dieses Gleichungssystem *unendlich viele* Lösungen. Deshalb sind die Vektoren linear abhängig. Man erhält die möglichen Zerlegungen, indem man für ***c1*** eine beliebige reelle Zahl einsetzt; für ***c1***=1 erhält man beispielsweise $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.

17. Geradengleichung mit Vektoren

17.1 Eine Geradengleichung eingeben und speichern

In Parameterform

Speichere die Gleichung der Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

r0:=[6; 3; 2] Enter → $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

a:=[3; –2; 2] Enter → $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

g(t):=r0+t*a Enter → Fertig

In vielen Fällen reicht auch die Kurzfassung:

g(t):=[6; 3; 2]+t*[3; –2; 2] Enter → Fertig

Als Koordinatengleichung (nur für Geraden in der xy-Ebene)

Speichere die Gleichung der Geraden h: 2x+3y=6:

h(x, y):=2*x+3*y=6 Enter → Fertig

17.2 Nur in der xy-Ebene: Umrechnung Parameterform ↔ Koordinatengleichung

Parameterform → Koordinatengleichung

menu

Welches ist die Koordinatengleichung der Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

g(t):= [2; –2]+t*[1; 2] Enter → Fertig

3 1 — solve(g(t)=[x; y], {t, y}) Enter → t=x–2 and y=2·(x–3)

Die Geradengleichung ist y=2·(x–3) bzw. y=2x–6.

Welches ist die Koordinatengleichung der Geraden $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$?

g(t):=[2; –2]+t*[0; 3] Enter → Fertig

3 1 — solve(g(t)=[x; y], {t, y}) Enter → $t=\frac{\boldsymbol{c1}+2}{3}$ and x=2 and y=$\boldsymbol{c1}$

Die Geradengleichung ist x=2. Diese Gerade verläuft parallel zur y-Achse.

Koordinatengleichung → Parameterform

Wie lautet eine Parameterform der Geraden g mit der Koordinatengleichung 2x–3y=1?

g(x, y):=2*x–3*y=1 Enter → Fertig

3 D 1 — left(g(x, y)–right(g(x, y))) Enter → 2·x–3·y–1

3 D 2 — 3 4 — res:=zeros(ans, {x, y}) Enter → $\begin{bmatrix} \frac{3\cdot \boldsymbol{c1}+1}{2} & \boldsymbol{c1} \end{bmatrix}$

            Das Zeichen ^{T}	3 3 7 2	res:=expand(res^T) Enter → $\begin{bmatrix} \frac{3\cdot \boldsymbol{c1}}{2}+1/2 \\ \boldsymbol{c1} \end{bmatrix}$ Wenn man ***c1*** als Parameter t auffasst, kann man die Geradengleichung nun unmittelbar ablesen: $\vec{r}=\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3/2\\1\end{pmatrix}$. Eine weitere Möglichkeit: r0:=res | @c1=0 Enter → $\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$ a:=(res | @c1=1)–r0 Enter → $\begin{bmatrix}3/2\\1\end{bmatrix}$ h(t):=r0+t*a Enter → Fertig Das Zeichen ^{T} wird mit menu 7 2 oder @t erzeugt.
17.3 Inzidenzprobe: Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g? g liegt in Parameterform vor g liegt in der Koordinatengleichung vor	menu 🛠 3 1	Liegt der Punkt P(3, –6, 2) auf der Geraden g: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$? g(t):=[–1; 0; –1]+t*[2; –3; 1] Enter → Fertig p:=[3; –6; 2] Enter → $\begin{bmatrix}3\\-6\\2\end{bmatrix}$ solve(g(t)=p, t) Enter → false Weil diese Gleichung keine Lösung t hat, liegt P nicht auf g. Liegt der Punkt P(2, 6) auf der Geraden g: 4x–3y=5? g(x, y):=4*x–3*y=5 Enter → Fertig g(2, 6) Enter → false, d. h., P liegt nicht auf g.
17.4 Nur in der xy-Ebene: Achsenabschnitte berechnen g liegt in Parameterform vor g liegt in der Koordinatengleichung vor	menu 🛠 3 1 3 1 3 1 3 1	Welches sind die beiden Achsenabschnitte X(x, 0) und Y(0, y) der Geraden g: $\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$? g(t):=[2; –2]+t*[1; 2] Enter → Fertig solve(g(t)=[x; 0], {t, x}) Enter → t=1 and x=3, d. h. X(3, 0) solve(g(t)=[0; y], {t, y}) Enter → t=–2 and y=–6, d. h. Y(0, –6) Welches sind die Achsenabschnitte der Geraden g: 2x–3y=12? g(x, y):=2*x–3*y=12 Enter → Fertig solve(g(0, y), y) Enter → y=–4, d. h. Y(0, –4) solve(g(x, 0), x) Enter → x=6, d. h. X(6, 0)

17.5 Nur im Raum: Spurpunkte berechnen	3 1	Welches ist der erste Spurpunkt $S_1(x, y, 0)$ der Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$? g(t):=[6; 3; 2]+t*[3; –2; 2] `Enter` → Fertig solve(g(t)=[x; y; 0], {t, x, y}) `Enter` →t=–1 and x=3 and y=5 Interpretation: $S_1(3, 5, 0)$
17.6 Schnittpunkt zweier Geraden… … in Parameterform	menu 3 1 3 1 3 1	Gegeben sind die folgenden vier Geraden: g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, i: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, j: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wo schneiden sich a) g und h? b) g und i? c) g und j? Vorbereitung für a), b) und c): g(t):=[0; 1; 2]+t*[3; –2; 1] `Enter` → Fertig h(u):=[7; 5; 4]+u*[1; –3; 0] `Enter` → Fertig i(v):=[8; –2; 5]+v*[1, –3; 0] `Enter` → Fertig j(w):=[6; –3; 4]+w*[–6; 4; –2] `Enter` → Fertig a) solve(g(t)=h(u), {t, u}) `Enter` → false d. h., die Geraden schneiden sich nicht. Gemäss 16.8 kann man bei Bedarf untersuchen, ob die Geraden g und h parallel oder windschief sind. b) solve(g(t)=i(v), {t, v}) `Enter` → t=3 and v=1 g(3) `Enter` → $\begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ d. h., g und i schneiden sich in S(9, –5, 5). c) solve(g(t)=j(w), {t, w}) `Enter` → t=–2·(***c1*** –1) and w=***c1*** Die Geraden g und j haben unendlich viele gemeinsame Punkte und fallen daher zusammen.
… in Koordinatengleichung	3 1	Wo schneiden sich die beiden Geraden g: 2x+3y=1 und h: y=x–3? g(x, y):=2*x+3*y=1 `Enter` → Fertig h(x, y):=y=x–3 `Enter` → Fertig solve(g(x, y) and h(x, y), {x, y}) `Enter` → x=2 and y=–1, d. h., der Schnittpunkt ist S(2, –1). Das Ergebnis *false* würde bedeuten, dass die Geraden parallel sind.

17.7 Von einem Punkt einer Geraden aus eine Strecke auf der Geraden abtragen	menu	Der Punkt P(6, 3, 2) liegt auf der Geraden g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welche Punkte auf g haben von P den Abstand $\sqrt{68}$?
	7 C 1	[6; 3; 2]+root(68)*unitv([3; –2; 2]) Enter → $\begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$
	7 C 1	[6; 3; 2]–root(68)*unitv([3; –2; 2]) Enter → $\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$
		Die beiden Punkte sind P_1(12, –1, 6) und P_2(0, 7, –2).