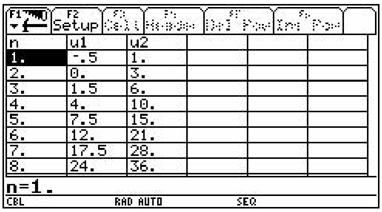
14. Folgen und Reihen, Grenzwerte

14.1 Eine Folge definieren Explizite Definition Rekursive Definition	Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit a_n=2n+1: 2*n+1 [STO▶] a(n) [ENTER] → Done Definiere die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}, b_n = \begin{cases} 3, & \text{falls } n=1 \\ b_{n-1}+2 & \text{sonst} \end{cases}$: when(n=1, 3, b(n–1)+2)[STO▶] b(n) [ENTER] →Done Bedingung So wird b_n berechnet, wenn n die Bedingung erfüllt. So wird b_n berechnet, wenn n die Bedingung nicht erfüllt.
14.2 Glieder einer vorher definierten Folge berechnen Ein Glied Mehrere Glieder	Berechne das 7. Glied der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: a(7)[ENTER] → 15 Berechne die Glieder mit den Nummern 3 bis 6 der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: **1. Weg:** a(n) | n={3, 4, 5, 6} [ENTER] → {7 9 11 13} **2. Weg:** seq(a(i), i, 3, 6) [ENTER] → {7 9 11 13} ☝ Bei rekursiver Definition führt der erste Weg oft zu einem Memory-Error.
14.3 Eine Folge definieren und einige Glieder berechnen	Berechne von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit a_n=2n+1 die Glieder mit den Nummern 3 bis 7 seq(2*n+1, n, 3, 7) [ENTER] → {7 9 11 13 15}
14.4 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge zusammenzählen: $\sum_{i=1}^{n} a_i$	Zähle alle Glieder der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit a_i=2i+1 zusammen, deren Index i zwischen 1 und n liegt: Σ(a(i),i,1,n) [ENTER] → n^2+2·n Das Zeichen Σ wird auf dem Voyage 200 erzeugt mit [2nd][Σ], auf dem TI-89 Titanium mit [F3]4 . Addiere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $c_i=\frac{1}{2^i}$: Σ(1/(2^i), i, 1, ∞) [ENTER] → 1 Das Zeichen ∞ befindet sich beim Voyage 200 oberhalb der Taste J, beim TI-89 Titanium oberhalb der Taste [CATALOG].
14.5 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge multiplizieren: $\prod_{i=1}^{n} a_i$	Multipliziere alle Glieder der Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit a_i=2*i+1, deren Index i zwischen 3 und 8 liegt: Π(a(i), i, 3, 8) [ENTER] → 2297295 Das Zeichen Π wird erzeugt mit [F3]5 . Multipliziere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $c_i=\frac{1}{2^i}$: Π(1/2^i, i, 1, ∞) [ENTER] → 0

14.6 Die Wertetabelle für eine oder mehrere Folgen aufstellen	Erzeuge eine Wertetabelle für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n=\frac{n^2}{2}-n$ und die rekursiv definierte Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $v_n=\begin{cases}1, \text{ falls } n=1\\ v_{n-1}+n \text{ sonst}\end{cases}$
Vorbereitung	**1. Weg (auch für mehrere Folgen geeignet):** **1. Schritt:** Den Rechner auf Folgen vorbereiten [MODE] Graph ... SEQUENCE [ENTER] (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)
Folge(n) definieren	**2. Schritt:** Die Folgen definieren und auswählen [♦][Y=] Eventuell vorhandene alte Folgen können gelöscht werden mit [F1] 8 [ENTER] Explizit definierte Folge eingeben: u1(n)=n^2/2−n [ENTER] ui1= nichts eingeben Rekursiv definierte Folge eingeben: u2(n)=u2(n−1)+n [ENTER] ui2=1 [ENTER] Folgen, vor deren Gleichung ein ✓steht, werden berechnet. Das ✓ kann mit ⊕ und [F4] gesetzt bzw. gelöscht werden.
n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen	**3. Schritt:** Die gewünschten n-Werte angeben [♦][TblSet] tblStart: 1 ⌄ Δtbl: 1 [ENTER] [ENTER] (Diese Angaben müssen nicht jedes Mal eingegeben werden.)
Tabelle berechnen	**4. Schritt:** Die Tabelle ausgeben [♦][TABLE] →



n	u1	u2
1.	-.5	1.
2.	0.	3.
3.	1.5	6.
4.	4.	10.
5.	7.5	15.
6.	12.	21.
7.	17.5	28.
8.	24.	36.

n=1.

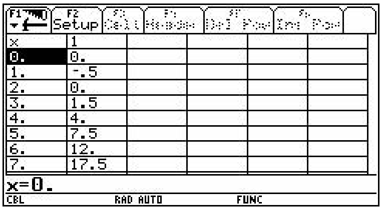
	Mit ⊕ können weitere Werte angezeigt werden. Mit [F2] können die n-Werte geändert werden, wie beim 3. Schritt beschrieben.
Rückkehr zum Home-Screen	**Voyage 200:** [♦][HOME] **TI-89 Titanium:** [HOME]
	2. Weg: Berechne einige Glieder der Folge $a_n=\frac{n^2}{2}-n$:
Vorbereitung	**1. Schritt:** Rechner auf Funktionen (!) vorbereiten [MODE] Graph ... FUNCTION [ENTER] (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)

n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen

2. Schritt: Gewünschte n-Werte angeben
[♦][TblSet]
tblStart: 0 [▼]
Δtbl: 1 [ENTER] [ENTER]
(Diese Angaben sind nicht jedes Mal nötig.)

Tabelle berechnen

3. Schritt: Tabelle ausgeben
table n^2/2-n, n [ENTER] →



Mit [⊕] können weitere Werte angezeigt werden.
Mit [F2] können die n-Werte geändert werden, wie beim 2. Schritt beschrieben.

Rückkehr zum Home-Screen

Voyage 200: [♦][HOME]
TI-89 Titanium: [HOME]

☝ Der Befehl table n^2/2–n, n funktioniert *nicht*, wenn der Graphik-Modus auf sequence eingestellt ist (→ 1. Schritt).

3. Weg (etwas unübersichtlich, aber schnell):

Gezielt einige Glieder berechnen

Berechne einige Glieder der Folge $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:

n^2/2–n | n={1, 10, 20, 30, 50} [ENTER] →
{–1/2 40 180 420 1200}

14.7 Eine Folge graphisch darstellen

Erzeuge die Graphen für die explizit definierte Folge $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ und die rekursiv definierte Folge

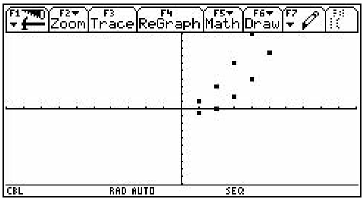
$$v_n = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = 1 \\ v_{n-1} + n \text{ sonst} \end{cases}$$

Vorbereitung

1. Schritt: Rechner auf Folgen vorbereiten
[MODE] Graph ... SEQUENCE [ENTER] (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)

Folge(n) definieren

2. Schritt: Folgen definieren und auswählen
[♦][Y=]
Eventuell vorhandene alte Folgen können gelöscht werden mit [F1] 8 [ENTER]
Explizit definierte Folge eingeben:
u1(n)=n^2/2–n [ENTER]
ui1= nichts eingeben
Rekursiv definierte Folge eingeben:
u2(n)=u2(n–1)+n [ENTER]
ui2=1
Folgen, vor denen ein ✓ steht, werden berechnet. Das ✓ kann mit [⊕] und [F4] gesetzt bzw. gelöscht werden.

Graph(en) zeichnen	**3. Schritt:** Graphen darstellen ◆ [GRAPH] → 
Änderung des darge- stellten Ausschnittes	Stelle einen anderen Ausschnitt des Graphen dar: **1. Weg:** [F2] 1: Schränke den dargestellten Ausschnitt mit den Tasten ⊕ und [ENTER] auf einen recht-eckigen Bereich ein. 2: Stelle einen 4-mal kleineren Ausschnitt dar. 3: Stelle einen 4-mal grösseren Ausschnitt dar. 5: 1 Einheit auf der n-Achse ist gleich lang wie 1 Einheit auf der u-Achse. 6: Stelle den Standardausschnitt dar: n-Werte: 1...10, von n=1 an wird für jedes Folgenglied ein Punkt gezeichnet. x-Werte: –10...10, 1 Markierung = 1 Einheit y-Werte (u-Werte): –10...10, 1 Markierung = 1 Einheit A: Bestimmt den y-Bereich so, dass der Graph für den gewählten x-Bereich vollständig an-gezeigt wird. **2. Weg:** ◆[WINDOW] Der Ausschnitt kann auch direkt eingegeben werden. Es bedeuten: nmin: kleinster Wert von n (erstes Glied der Folge) nmax: grösster Wert von n (letztes Glied der Folge) plotstrt: kleinstes n, für das u_n gezeichnet wer-den soll plotstep: Für jedes wievielte n soll u_n gezeichnet werden? xmin: kleinster x-Wert des Ausschnittes xmax: grösster x-Wert des Ausschnittes xscl: Abstand zwischen zwei Markierungen auf der x-Achse ymin: kleinster y-Wert des Ausschnittes ymax: grösster y-Wert des Ausschnittes yscl: Abstand zwischen zwei Markierungen auf der y-Achse
Rückkehr zum Home- Screen	**Voyage 200:** ◆[HOME] **TI-89 Titanium:** [HOME]

14.8 Die Beschränktheit einer Folge untersuchen Gegen oben	Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4-2n$ gegen oben beschränkt? Welches ist allenfalls eine obere Schranke? 4–2*n [STO▸] a(n) [ENTER] → Done fmax(a(n), n) | n>=1 [ENTER] → n=1 a(n) | ans(1) [ENTER] → 2 Die Folge ist gegen oben beschränkt, und 2 ist eine obere Schranke.
Gegen unten	Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 4-2n$ gegen unten beschränkt? Welches ist allenfalls eine untere Schranke? 4–2*n [STO▸] a(n) [ENTER] → Done fmin(a(n), n) | n>=1 [ENTER] → n=∞ a(n) | ans(1) [ENTER] → –∞ Die Folge ist nicht gegen unten beschränkt.
14.9 Den Grenzwert einer Folge berechnen	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)=?$ limit(1+(3/4)^n, n, ∞) [ENTER] → 1 ☝ Die Resultate des Taschenrechners sind mit Vorsicht zu geniessen; → Schwierigkeiten und Probleme, Nr. 5 und 6. ☝ undef hat bei Grenzwerten zwei verschiedene Bedeutungen: – Der Limes existiert nicht, oder – der Taschenrechner findet den Limes nicht.

Schwierigkeiten und Probleme

1. Vereinfache: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Lösung: ∞, ln 2, π/4, $\pi^2/12$

Σ(1/k, k, 1, ∞) [ENTER] →	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$
Σ((–1)^(k+1)/k, k, 1, ∞) [ENTER] →	$-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k}\right)$
Σ((–1)^k/(2*k+1), k, 0, ∞) [ENTER] →	$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{2\cdot k+1}\right)$
Σ((–1)^(k+1)/k^2, k, 1, ∞) [ENTER] →	$-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k^2}\right)$

Keine dieser Reihen wird erkannt.

2. $a_n := \sum\limits_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$, $a_{k+1}-a_k=?$

Lösung: $\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k+1}$

Σ(1/i, i, n+1, 2*n) → a(n) [ENTER] → Done a(k+1)–a(k) [ENTER] → $\sum_{i=k+2}^{2\cdot(k+1)}\left(\frac{1}{i}\right)-\sum_{i=k+1}^{2\cdot k}\left(\frac{1}{i}\right)$

Der Term wird nicht ausgewertet.

3.	Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ für $\|v\|<1$ und $0<v<1$	Lösung: $\frac{1}{1-v}$, $\frac{1}{1-v}$

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>–1 and v<1 [ENTER] → $\sum_{n=0}^{\infty}(v^n)$

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>0 and v<1 [ENTER] → $\frac{-1}{v-1}$

Bei der ersten Aufgabe erhält man ein wenig hilfreiches Resultat.

4.	Vereinfache:	Lösung:
	$\sum_{k=0}^{100} c^k$ für $c\neq 1$	$\frac{c^{101}-1}{c-1}$
	$\sum_{k=0}^{n} c^k$	$\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$
	Werte das Resultat der zweiten Aufgabe aus für n=100.	$\frac{c^{101}-1}{c-1}$

Σ(c^k, k, 0, 100) | c/=1 [ENTER] → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

Σ(c^k, k, 0, n) [ENTER] → $\frac{c^{n+1}}{c-1}-\frac{1}{c-1}$

ans(1) | n=100 [ENTER] → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$
Note: Domain of result may be larger

Wann wird die Summe zusammengefasst?

5.	Vereinfache:	Lösung:
	a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}$, falls n<m	0
	b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}$, falls n>m	∞
	c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}$, falls x= –1	½
	d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}+1}$, falls x< –1	0

a) limit(x^n / x^m, x, ∞) | n<m [ENTER] → undef
b) limit(x^n / x^m, x, ∞) | n>m [ENTER] → undef
c) limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x=–1 [ENTER] → undef
d) limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x<–1 [ENTER] → Error: Non-real result
Abhilfe: Man kann versuchen, n und m als @n1 und @n2 zu bezeichnen:
c) limit(1/(x^(2*@n1)+1),@n1,∞)|x=–1 [ENTER] → ½
Bei den anderen drei Beispielen klappt dieser Trick freilich nicht.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{20}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.05\cdot t}{n}\right)^n$ Lösungen: $e^{\frac{t}{20}}$ $e^{0.05t}\approx 1.0513^t$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.04\cdot t}{n}\right)^n$ $e^{0.04t}\approx 1.04081^t$

limit((1+(t/20)/n)^n, n, ∞) ENTER → $e^{\frac{t}{20}}$
limit((1+(0.05*t)/n)^n, n, ∞) ENTER → 0
Dieses Resultat ist falsch.
limit((1+(0.04*t)/n)^n , n , ∞) ENTER → $(1.04081)^t$
Wann gelingt die Lösung, wann nicht?