

## 5. Reihen

### 5.1 Überblick

Gegeben ist eine beliebige Folge  $(a_n)$  mit unendlich vielen Gliedern  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ . Welches ist die Summe  $s$  aller ihrer (unendlich vielen!) Glieder?

Selbst für einen Supercomputer ist diese Aufgabe mit roher Rechengewalt nicht lösbar, weil die Addition unendlich vieler Zahlen unendlich lange dauert. Wir zeigen, wie man in vielen Fällen mit Köpfchen ans Ziel kommt.

### 5.2 Beispiele für Reihen

Welches ist die Summe  $s$  aller (unendlich vielen!) Glieder  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  einer beliebigen Folge  $(a_n)$ ?

Wir werden uns an  $s$  herantasten, indem wir immer mehr Glieder der Folge  $(a_n)$  zusammenzählen. Diesen Weg zeigen wir an einigen Beispielen auf.

#### 5.2.1 Beispiel

Gegeben ist die geometrische Folge mit

$$a_1 = 0.1, a_2 = 0.01, a_3 = 0.001, \dots, a_n = 0.1^n, \dots$$

Gesucht ist die Summe aller ihrer Glieder:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$$

Wir tasten uns Schritt für Schritt an die gesuchte Summe  $s$  heran. Dazu bilden wir die „Folge der Zwischenresultate“, die *Teilsammenfolge*.

$s_1$	$= a_1$	$= 0.1$	$= 0.1$
$s_2$	$= a_1 + a_2$	$= 0.1 + 0.01$	$= 0.11$
$s_3$	$= a_1 + a_2 + a_3$	$= 0.1 + 0.01 + 0.001$	$= 0.111$
$s_4$	$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$= 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001$	$= 0.1111$
...		...	...
$s_{10}$	$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$	$= \dots$	$= 0.1111111111$
...		...	...

Diese Folge legt die Vermutung nahe, dass die  $n$ -te Teilsumme Summe  $s_n$  diejenige Zahl ist, die vor dem Komma eine Null hat und nach dem Komma genau  $n$  Einsen. Bei unendlich vielen Summanden erwarten wir deshalb eine Null vor dem Komma und unendlich viele Einsen nach dem Komma. Dieser unendliche Dezimalbruch stellt offensichtlich den Bruch  $\frac{1}{9}$  dar. Man sagt deshalb, die gesuchte Summe sei  $s = \frac{1}{9}$ .

Mit anderen Worten: Je grösser  $n$  ist, desto näher liegt  $s_n$  bei  $\frac{1}{9}$ . Die „Folge der Zwischenresultate“ oder eben die *Teilsammenfolge* strebt gegen  $\frac{1}{9}$ .



Dieses Beispiel zeigt etwas Unerwartetes: **Man kann sehr wohl unendlich viele positive Zahlen zusammenzählen – und trotzdem ist das Resultat endlich!**

Was wir „Folge der Zwischenresultate“ genannt haben, also die Folge  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ , bezeichnet man als *Teilsammenfolge*.

### 5.2.2 Beispiel

Gegeben ist die arithmetische Folge mit

$$a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 21, a_4 = 31, \dots, a_n = 1 + (n-1) \cdot 10, \dots$$

Gesucht ist die Summe  $s$  aller ihrer Glieder:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = 1 + 11 + 21 + 31 + \dots$$

Wieder tasten wir uns mithilfe der Teilsammenfolge Schritt für Schritt an die gesuchte Summe  $s$  heran.

$$\begin{array}{llll} s_1 & = a_1 & = 1 & = 1 \\ s_2 & = a_1 + a_2 & = 1 + 11 & = 12 \\ s_3 & = a_1 + a_2 + a_3 & = 1 + 11 + 21 & = 33 \\ s_4 & = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = 1 + 11 + 21 + 31 & = 64 \\ \dots & & \dots & \dots \\ s_{10} & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} & = 1 + 11 + 21 + \dots + 91 & = 460 \\ \dots & & \dots & \dots \\ s_{100} & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} & = \dots & = 49'600 \\ \dots & & \dots & \dots \\ s_{1000} & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000} & = \dots & = 4'996'000 \\ \dots & & \dots & \dots \end{array}$$

Offensichtlich wachsen die Zwischenresultate für immer grösser werdendes  $n$  über alle Schranken. Es ist deshalb sinnvoll zu sagen, die Summe sei  $s = \infty$ .



### 5.2.3 Beispiel

Gegeben ist die alternierende Folge mit

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, \dots, a_n = (-1)^n, \dots$$

Gesucht ist die Summe  $s$  aller ihrer Glieder:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = (-1) + 1 + (-1) + 1 + \dots$$

Hier die Teilsammenfolge:

$$\begin{array}{llll} s_1 & = a_1 & = (-1) & = -1 \\ s_2 & = a_1 + a_2 & = (-1) + 1 & = 0 \\ s_3 & = a_1 + a_2 + a_3 & = (-1) + 1 + (-1) & = -1 \\ s_4 & = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = (-1) + 1 + (-1) + 1 & = 0 \\ \dots & & \dots & \dots \\ s_{100} & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} & = (-1) + 1 + (-1) \dots + 1 & = 0 \\ s_{101} & = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{101} & = (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1) & = -1 \\ \dots & & \dots & \dots \end{array}$$

Die Zwischenresultate wechseln ab zwischen  $-1$  und  $0$ . Es ist unmöglich, eine eindeutige Zahl als Summe  $s$  anzugeben.



**5.2.4 Beispiel**

Gegeben ist die geometrische Folge mit

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{8}, \dots, a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

Gesucht ist die Summe  $s$  aller ihrer Glieder:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$$

Die Teilsummenfolge ist

$s_1 = a_1$	$= 1$	$= 1$	$= 1$
$s_2 = a_1 + a_2$	$= 1 + \frac{1}{2}$	$= \frac{3}{2}$	$= 1.5$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$= \frac{7}{4}$	$= 1.75$
$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$= \frac{15}{8}$	$= 1.875$
...	...	...	...
$s_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$	$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{512}$	$= \frac{1'023}{512}$	$= 1.998046875$
...	...	...	...
$s_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}$	$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{524'288}$	$= \frac{1'048'575}{524'288}$	$= 1.99999809\dots$
...	...	...	...

Offenbar liegt die Summe  $s_n$  umso näher bei 2, je grösser  $n$  ist, d. h., je mehr Glieder wir zusammenzählen. Daher sagt man, die gesuchte Summe aller (unendlich vielen) Summanden sei  $s=2$ .

Zu diesem Resultat gelangt man auch mit folgender illustrierenden Überlegung:

Ein Wanderer zieht mit 2 Litern Wasser los. Bei jeder Rast trinkt er die Hälfte des noch in der Flasche vorhandenen Wassers:

- bei der ersten Rast 1 Liter, und es bleibt noch 1 Liter in der Flasche zurück;
  - bei der zweiten Rast vom Rest die Hälfte – also  $\frac{1}{2}$  Liter, und es bleibt  $\frac{1}{2}$  Liter übrig;
  - bei der dritten Rast wieder vom Rest die Hälfte,  $\frac{1}{4}$  Liter, und es bleibt  $\frac{1}{4}$  Liter übrig;
- usw.

Je häufiger der Wanderer rastet, desto mehr entleert sich seine Flasche. Auf lange Sicht, d. h. für  $n \rightarrow \infty$ , strebt der Restinhalt gegen 0. Das bedeutet, dass die vom Wanderer getrunkene Wassermenge

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

auf lange Sicht gegen 2 Liter strebt, den ursprünglichen Flascheninhalt.

Der Wanderer schafft es aber in endlich vielen Pausen nicht, die ganzen 2 Liter auszutrinken, da nach jeder Rast noch etwas in der Flasche übrig bleibt – wenn auch irgendwann einmal weniger als ein Wassermolekül.

**5.2.5 Beispiel**

Gegeben ist die Folge  $(a_n)$  mit

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right), a_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), a_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \dots, a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \dots$$

Gesucht ist die Summe  $s$  aller ihrer Glieder:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \dots$$

Um die Summe  $s$  bestimmen zu können, bilden wir die Teilsummenfolge  $(s_n)$ :

$$\begin{array}{rclclcl}
s_1 & = & a_1 & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) & = & 1 - \frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} & = & 0.5 \\
s_2 & = & a_1 + a_2 & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) & = & 1 - \frac{1}{3} & = & \frac{2}{3} & = & 0.666\dots \\
s_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) & = & 1 - \frac{1}{4} & = & \frac{3}{4} & = & 0.75 \\
s_4 & = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) & = & 1 - \frac{1}{5} & = & \frac{4}{5} & = & 0.8 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
s_{99} & = & a_1 + a_2 + \dots + a_{99} & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) & = & 1 - \frac{1}{100} & = & \frac{99}{100} & = & 0.99 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
s_{999} & = & a_1 + a_2 + \dots + a_{999} & = & \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{990} - \frac{1}{1000}\right) & = & 1 - \frac{1}{1000} & = & \frac{999}{1000} & = & 0.999 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Mit wachsendem  $n$  rücken die Zwischenresultate immer näher gegen 1 heran. Vermutung: Die gesuchte Summe ist  $s=1$ .



### 5.2.6 Definitionen

Es sei  $(a_n)$  eine beliebige Folge mit unendlich vielen Gliedern.

(1) Unter der *Reihe*  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  versteht man die Teilsummenfolge  $(s_n)$ , festgelegt durch

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

(2) Falls der Grenzwert  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  existiert, nennt man ihn den *Wert der Reihe* oder die

$$\text{Summe der Reihe. Schreibweise: } s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

(3) Falls die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  bestimmt divergiert, schreibt man  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$  bzw.  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = -\infty$ .

Das Symbol  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  hat gemäss dieser Definition zwei Bedeutungen: Zum einen bezeichnet

es die Reihe an sich, also die Teilsummenfolge  $(s_n)$ . Zum andern bezeichnet es aber auch den Wert  $s$  der Reihe, wenn dieser existiert.

### 5.2.7 Beispiele

Wie schreibt man die Beispiele 5.2.1 bis 5.2.5 mit dem Summenzeichen?

$$5.2.1: \quad \sum_{i=1}^{\infty} 0.1^i = \frac{1}{9},$$

$$5.2.2: \quad \sum_{i=1}^{\infty} (1 + (i-1) \cdot 10) = \infty \quad (\text{die Teilsummenfolge } (s_n) \text{ divergiert gegen } +\infty),$$

$$5.2.3: \quad \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \text{ existiert nicht (die Teilsummenfolge } (s_n) \text{ divergiert unbestimmt),}$$

$$5.2.4: \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2,$$

$$5.2.5: \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1.$$



### 5.3 Die Summe einer arithmetischen Reihe

Arithmetische Reihen gehen aus einer arithmetischen Folge  $(a_n)$  hervor. Im letzten Abschnitt haben wir eine arithmetische Reihe angetroffen, die divergiert (Beispiel 5.2.2). Das ist der Normalfall bei arithmetischen Reihen. Nur gerade für die arithmetische Folge

$$0, 0, 0, 0, 0, \dots$$

entsteht eine konvergente Reihe mit der Summe 0. Allgemein gilt:

#### 5.3.1 Satz

Es sei  $(a_n)$  eine arithmetische Folge, bestimmt durch  $a_1$  und  $d$ . Für die zugehörige arithmetische Reihe gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} (a_1 + (i-1) \cdot d) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_1 = 0 \text{ und } d = 0 \text{ ist} \\ +\infty, & \text{falls } d > 0 \\ -\infty, & \text{falls } d < 0. \end{cases}$$

Beweis

Wir verwenden Formel [2.12] für das  $n$ -te Glied der Teilsummenfolge  $(s_n)$ :

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

und unterscheiden mehrere Fälle.

- $d > 0$ : Für  $n \rightarrow \infty$  streben auch  $\frac{n}{2}$  und  $a_n$  (gemäss Satz 4.6.2) gegen  $+\infty$ . Daher strebt auch  $s_n$  gegen  $+\infty$ :

$$s_n = \underbrace{\frac{n}{2}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left( \underbrace{a_1}_{\text{fest}} + \underbrace{a_n}_{\rightarrow +\infty} \right)}_{\rightarrow +\infty}.$$

- $d < 0$ : Für  $n \rightarrow \infty$  strebt auch  $\frac{n}{2} \rightarrow \infty$ . Hingegen strebt  $a_n$  gemäss Satz 4.6.2 nun gegen  $-\infty$ . Wieder betrachten wir [2.12]:

$$s_n = \underbrace{\frac{n}{2}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left( \underbrace{a_1}_{\text{fest}} + \underbrace{a_n}_{\rightarrow -\infty} \right)}_{\rightarrow -\infty}.$$

Weil das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl stets negativ ist, strebt  $s_n$  gegen  $-\infty$ . Auch in diesem Fall konvergiert die Reihe nicht.

- $d = 0$ :  $(a_n)$  ist eine konstante Folge:

$$a_1, a_2 = a_1, a_3 = a_1, \dots, a_n = a_1, \dots,$$

und das  $n$ -te Glied der Teilsummenfolge  $(s_n)$  ist

$$s_n = n \cdot a_1.$$

Mit dieser Formel erkennt man leicht, was für  $n \rightarrow \infty$  geschieht:

- $a_1 > 0$ :  $s_n$  strebt gegen  $+\infty$ ; die Reihe divergiert.
- $a_1 < 0$ :  $s_n$  strebt gegen  $-\infty$ ; die Reihe divergiert.
- $a_1 = 0$ : Alle Glieder von  $(s_n)$  haben den Wert 0; die Reihe konvergiert und hat den Wert 0.



## 5.4 Die Summe einer geometrischen Reihe

Nun gehen wir von einer geometrischen Folge  $(a_n)$  aus, die durch  $a_1$  und  $q$  bestimmt ist, und bilden die zugehörige geometrische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{i-1}.$$

Das  $n$ -te Glied  $s_n$  der Teilsummenfolge ist gemäss [2.19]

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Wir greifen zurück auf Satz 4.7.3 und unterscheiden wie dort mehrere Fälle.

- $a_1=0$ : Die Teilsummenfolge ist gemäss [2.19]

$$s_1=0, s_2=0, s_3=0, s_4=0, \dots$$

und hat offensichtlich den Grenzwert  $s=0$ .

In den nun folgenden Untersuchungen ist stets  $a_1 \neq 0$ .

- $q > 1$  und  $a_1 > 0$ : Gemäss [4.3] strebt  $q^n$  gegen  $+\infty$  für  $n \rightarrow +\infty$ . Wenn wir dies in [2.19] einsetzen, erhalten wir:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a_1}_{>0} \cdot \frac{\overbrace{q^n - 1}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{q - 1}_{>0}} = +\infty.$$

- $q > 1$  und  $a_1 < 0$ : Gegenüber dem letzten Fall ändert sich das Vorzeichen von  $a_1$ . Wir erhalten:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{a_1}_{<0} \cdot \frac{\overbrace{q^n - 1}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{q - 1}_{>0}} = -\infty.$$

- $q=1$ : Es liegt eine konstante Folge vor:

$$a_1, a_2=a_1, a_3=a_1, \dots, a_n=a_1, \dots,$$

und das  $n$ -te Glied der Teilsummenfolge ( $s_n$ ) ist

$$s_n = n \cdot a_1.$$

Für  $a_1 > 0$  strebt die Teilsummenfolge gegen  $+\infty$ , für  $a_1 < 0$  strebt sie gegen  $-\infty$ .

- $-1 < q < 1$ : Dies ist der wichtigste Fall! Für  $n \rightarrow \infty$  strebt  $q^n$  gemäss [4.3] gegen 0. Daher erhalten wir mit [2.19] für  $n \rightarrow \infty$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - \overbrace{q^n}^{\rightarrow 0}}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

- $q=-1$ : Die Folge

$$a_1, -a_1, a_1, -a_1, a_1, -a_1, \dots$$

hat die divergente Teilsummenfolge

$$a_1, 0, a_1, 0, a_1, 0, \dots$$

- $q < -1$ : Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$  existiert gemäss Satz 4.7.3 nicht. Dies gilt auch für den Grenzwert

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{a_1}{1 - q}}_{\substack{\text{feste Zahl,} \\ \text{unabh\u00e4n-} \\ \text{gig von } n}} \cdot \underbrace{(1 - q^n)}_{\substack{\text{divergiert} \\ \text{unbestimmt}}}.$$

Damit haben wir bewiesen:

### 5.4.1 Satz

Es sei  $(a_n)$  eine geometrische Folge, bestimmt durch  $a_1$  und  $q$ . F\u00fcr die zugeh\u00f6rige geometrische Reihe gilt:

$$(1) \text{ F\u00fcr } a_1 = 0 \text{ ist } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{i-1} = 0.$$

$$(2) \text{ F\u00fcr } a_1 \neq 0 \text{ ist } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{i-1} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } q \geq 1 \text{ und } a_1 > 0, \\ -\infty, & \text{falls } q \geq 1 \text{ und } a_1 < 0, \\ \frac{a_1}{1 - q}, & \text{falls } -1 < q < 1 \\ \text{existiert nicht,} & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$$

**Die klar wichtigste Teilaussage dieses Satzes ist**

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{i-1} = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ falls } -1 < q < 1. \quad [5.1]$$

### 5.4.2 Beispiele

Was erh\u00e4lt man mit Satz 5.4.1 bei den drei geometrischen Reihen von Abschnitt 5.2?

5.2.1: • Dort ging es um die geometrische Folge

$$a_1 = 0.1, a_2 = 0.01, a_3 = 0.001, \dots, a_n = 0.1^n, \dots$$

mit  $a_1 = 0.1$  und  $q = \frac{a_2}{a_1} = 0.1$ . Wir haben gesehen, dass die zugeh\u00f6rige geometrische Reihe gegen  $\frac{1}{9}$  konvergiert.

• Mit Satz 5.4.1 erhalten wir dasselbe Resultat mit weniger Aufwand:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0.1}{0.9} = \frac{1}{9}.$$

5.2.3: • Vorgelegt war die geometrische Folge

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, \dots, a_n = (-1)^n, \dots,$$

mit  $a_1 = -1$  und  $q = -1$ . Wir haben erkannt, dass die zugeh\u00f6rige Reihe zwischen  $-1$  und  $0$  hin und her springt, also divergiert.

• Dies deckt sich mit Satz 5.4.1.

5.2.4: • Wir sind ausgegangen von der geometrischen Folge

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{8}, \dots, a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$$

mit  $a_1 = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$  und haben gesehen, dass die zugeh\u00f6rige geometrische Reihe gegen  $2$  konvergiert.

• Auch dies deckt sich mit Satz 5.4.1:

$$s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

◆

## 5.5 Beispiele für geometrische Reihen

### A. Periodische Dezimalbrüche

Wiederholt sich bei einem Dezimalbruch nach dem Komma dieselbe Abfolge von Ziffern unendlich oft, liegt ein *periodischer Dezimalbruch* vor. Die sich wiederholenden Ziffern nennt man *Periode*. Die zur Periode gehörenden Ziffern werden überstrichen.

$0.\overline{3} = 0.333\dots$ ,  $0.\overline{123} = 0.123123123\dots$  und  $0.777\overline{123} = 0.777123123123\dots$  sind Beispiele für periodische Dezimalbrüche.

Beginnt die Periode sofort nach dem Komma, so liegt ein *reinperiodischer Dezimalbruch* vor, andernfalls ein *gemischtperiodischer Dezimalbruch*.  $0.\overline{3}$  und  $0.\overline{123}$  sind reinperiodische Dezimalbrüche,  $0.777\overline{123}$  hingegen ist wegen der *Vorperiode* 777 ein gemischtperiodischer Dezimalbruch.

Ein reinperiodischer Dezimalbruch kann als geometrische Reihe aufgefasst werden. Deshalb kann man ihn mithilfe von Formel [5.1] in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln.

#### 5.5.1 Beispiel

Verwandeln Sie den Dezimalbruch  $0.\overline{36} = 0.363636\dots$  in einen gewöhnlichen Bruch.

Der Dezimalbruch  $0.\overline{36} = 0.363636\dots$  kann als Reihe geschrieben werden:

$$\underbrace{0.\overline{36}}_s = \underbrace{0.36}_{a_1} + \underbrace{0.0036}_{a_2} + \underbrace{0.000036}_{a_3} + \underbrace{0.00000036}_{a_4} + \dots$$

Die Summanden  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  sind die Glieder einer geometrischen Folge mit

$a_1 = 0.36$  und  $q = \frac{a_2}{a_1} = 0.01$ . Ihre Summe  $s$  ist nach [5.1]

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0.36}{1-0.01} = \frac{0.36}{0.99} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}, \text{ d. h. } 0.\overline{36} = \frac{4}{11}.$$

◆

Das Verfahren kann auch bei gemischtperiodischen Dezimalbrüchen angewandt werden.

#### 5.5.2 Beispiel

Verwandeln Sie den Dezimalbruch  $0.7\overline{4} = 0.7444\dots$  in einen gewöhnlichen Bruch.

Zunächst spalten wir den nichtperiodischen Teil ab, die Vorperiode  $v=0.7$ :

$$0.7\overline{4} = \underbrace{0.7}_v + \underbrace{0.04}_{a_1} + \underbrace{0.004}_{a_2} + \underbrace{0.0004}_{a_3} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_s$

Der periodische Teil bildet wieder eine geometrische Reihe, wir verfahren daher wie bei Beispiel 5.5.1:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.004}{0.04} = 0.1,$$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0.04}{0.9} = \frac{0.04}{0.90} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45},$$

und finden schliesslich

$$0.7\overline{4} = \frac{7}{\underbrace{10}_v} + \frac{2}{\underbrace{45}_s} = \frac{63+4}{90} = \frac{67}{90}.$$

◆

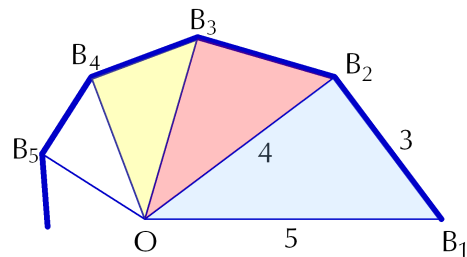


## B. Ähnliche Figuren

### 5.5.3 Beispiel

Die rechts abgebildete spiralförmige Figur ist aus rechtwinkligen Dreiecken zusammengesetzt, welche zueinander ähnlich sind, d. h., einander entsprechende Winkel sind gleich gross. Wir denken uns die Figur unendlich lange fortgesetzt.

- (1) Welches ist die Länge des dabei entstehenden fett eingezeichneten Linienzuges?
- (2) Welches ist die gesamte Fläche der unendlich vielen Dreiecke, aus denen die Figur besteht?



Wir greifen auf unser Wissen über die zentrische Streckung zurück. Das rote Dreieck  $OB_2B_3$  entsteht aus dem blauen Dreieck  $OB_1B_2$ , indem man letzteres von  $O$  aus zentrisch verkleinert und anschliessend um  $O$  dreht. Der Faktor  $k$  der zentrischen Streckung ist

$$k = \frac{4}{5} = 0.8,$$

denn die Seite  $OB_1$  des blauen Dreiecks mit Länge 5 geht über in die Seite  $OB_2$  des roten Dreiecks mit Länge 4.

- (1) Die Streckenlängen

$$\overline{B_1B_2} = 3,$$

$$\overline{B_2B_3} = k \cdot \overline{B_1B_2} = 0.8 \cdot 3 = 2.4,$$

$$\overline{B_3B_4} = k \cdot \overline{B_2B_3} = 0.8 \cdot 2.4 = 1.92,$$

...

bilden eine geometrische Folge mit Startglied 3 und  $q = k = 0.8$ .

Die Gesamtlänge wird berechnet gemäss

$$\begin{aligned} \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_4} + \dots &= 3 + 2.4 + 1.92 + \dots \\ &= 3 + 3q + 3q^2 + \dots \stackrel{[5.1]}{=} \frac{\overline{B_1B_2}}{1-q} = \frac{3}{1-0.8} = 15. \end{aligned}$$

- (2) Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor  $k$  muss man die Fläche der Originalfigur (hier: des blauen Dreiecks  $OB_1B_2$ ) mit  $k^2$  malnehmen, um die Fläche der Bildfigur (hier: des roten Dreiecks  $OB_2B_3$ ) zu berechnen.

Die Fläche des rechtwinkligen blauen Dreiecks  $OB_1B_2$  ist

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$$

die Fläche des roten Dreiecks  $OB_2B_3$  demzufolge

$$6 \cdot k^2 = 6 \cdot 0.8^2 = 3.84.$$

Ebenso erhalten wir für die Fläche des gelben Dreiecks  $OB_3B_4$

$$3.84 \cdot k^2 = 3.84 \cdot 0.8^2 = 2.4576$$

usw. Die Dreiecksflächen bilden eine geometrische Folge mit dem Faktor  $q = k^2 = 0.64$ . Somit ist die Summe aller Dreiecksflächen

$$6 + 3.84 + 2.4576 + \dots \stackrel{[5.1]}{=} \frac{6}{1-q} = \frac{6}{1-0.64} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}.$$

◆

## 5.6 Ergänzung: Spezielle Reihen

Aus der Vielzahl aller Reihen greifen wir noch ein paar Beispiele heraus, bei denen es sich weder um arithmetische noch um geometrische Reihen handelt.

### A. Noch einmal Beispiel 5.2.5

#### 5.2.5 Beispiel

Gegeben ist die Folge  $(a_n)$  mit

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right), a_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right), a_3 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \dots, a_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \dots$$

Gesucht ist die Summe  $s$  aller ihrer Glieder:

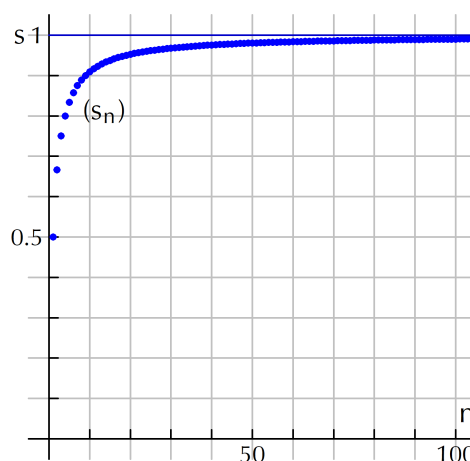
$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \dots$$

Wegen der speziellen Bauart der Folgenglieder ist es leicht, eine Formel für  $s_n$  zu finden:

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} \underbrace{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_0 - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} \underbrace{-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_0 - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Nach dieser Rechnung erkennt man leicht: Für  $n \rightarrow \infty$  strebt  $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$  und  $s_n \rightarrow 1$ , die gesuchte Summe ist  $s=1$ .

Auch der Graph nebenan deutet auf  $s=1$  hin.



Es ist im Allgemeinen überhaupt nicht selbstverständlich, dass wir eine Formel für  $s_n$  angeben können und erst noch den Grenzwert für  $n \rightarrow \infty$  bilden können!

Das Auffinden einer Formel für  $s_n$  ist schon schwieriger, wenn  $a_n$  nicht in der Form  $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  gegeben ist, sondern in der gleichwertigen Form  $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ . Dann kann der Trick mit den sich aufhebenden Summanden nicht mehr angewendet werden.

### B. Die harmonische Reihe

Wenn man von der Folge  $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)$  ausgeht, erhält man die *harmonische Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Um sie zu untersuchen, berechnen wir einige Glieder ihrer Teilsummenfolge  $(s_n)$ . Ein Taschenrechner mit Computer-Algebra-System oder ein PC leistet dabei wertvolle Hilfe.

n	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$	Graph von $(s_n)$ für $n=1, 2, \dots, 105$
1	1	
10	2.928968...	
20	3.597739...	
30	3.994987...	
40	4.278543...	
50	4.499205...	
60	4.679870...	
70	4.832836...	
80	4.965479...	
90	5.082570...	
100	5.187377...	

Man erkennt, dass mit jeder weiteren Erhöhung von  $n$  um 10 auch die Teilsumme  $s_n$  zunimmt, aber die Zunahme wird immer kleiner.

Nach 5000 Summanden sind wir bei  $s_{5'000}=9.094508...$  angelangt, nach weiteren 5000 Summanden bei  $s_{10'000}=9.787606...$ , also nicht viel mehr! Auch das zeigt, dass die Zunahme immer kleiner wird. Um  $s_{10'000}$  zu verdoppeln, müssen wir knapp 180'000'000 Glieder der Folge  $(a_n)$  zusammenzählen! Aufgrund dieses Verhaltens wird man erwarten, dass die harmonische Reihe gegen eine nicht allzu hohe Zahl konvergiert.

Aber das stimmt nicht! Man erkennt dies besser, wenn man die Teilsummenfolge in größerem Rahmen betrachtet:

n	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$	n	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$
$1=10^0$	1	$10^{12}$	28.208236...
$1'000=10^3$	7.485470...	$10^{15}$	35.115992...
$1'000'000=10^6$	14.392726...	$10^{18}$	42.023747...
$10^9$	21.300481...	$10^{21}$	48.931502...

Mit jeder Vertausendfachung von  $n$  wächst  $s_n$  um eine bestimmte Zahl. Diese Zuwächse sind der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
 s_{1'000} - s_1 &= 6.485470..., \\
 s_{1'000'000} - s_{1000} &= 6.907256..., \\
 \dots &= 6.907755..., \\
 \dots &= 6.907756..., \\
 \dots &= 6.907755..., \\
 \text{usw.}
 \end{aligned}$$

Weil man  $n$  unendlich oft vertausendfachen kann, wird zur Zwischensumme  $s_n$  auch unendlich oft etwa 6.907755... dazugezählt. Deshalb divergiert die harmonische Reihe gegen  $+\infty$ . Zwar tut sie das extrem langsam, aber sie divergiert!

Bei dieser Überlegung haben wir von einem Computer oder einem Computer-Algebra-System Gebrauch gemacht. Ohne diese Hilfsmittel sind die benötigten Teilsummen nicht innert angemessener Zeit zu berechnen.

**5.6.1 Satz**

Die harmonische Reihe divergiert gegen unendlich:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

Beweis

Zur Berechnung der Summe  $s$  der harmonischen Reihe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots$$

ersetzen wir die meisten Summanden durch eine etwas kleinere Zahl:

$$t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

Durch Vergleich der beiden Reihen erkennt man, dass wir  $\frac{1}{3}$  durch  $\frac{1}{4}$ , die Summanden  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$  und  $\frac{1}{7}$  durch  $\frac{1}{8}$  usw. ersetzt haben. Offensichtlich ist  $t < s$ .

Dieses Ersetzen führt dazu, dass wir  $t$  bequemer als  $s$  berechnen können:

$$t = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{32} + \dots$$

Es gelingt immer wieder, einige Summanden zu  $\frac{1}{2}$  zusammenzufassen. Man benötigt dazu zwar bei jedem Schritt doppelt so viele Summanden wie beim vorherigen Schritt, aber weil man ja unendlich viele Summanden zur Verfügung hat, spielt das keine Rolle.

Die Summe  $t$  setzt sich also aus einer 1 und unendlich vielen  $\frac{1}{2}$  zusammen. Darum strebt die Teilsummenfolge von  $t$  gegen unendlich. Weil  $t < s$  ist, strebt die Teilsummenfolge von  $s$  umso mehr gegen unendlich. ■

Ist es nicht wunderbar, dass eine elegante Überlegung mehr zu leisten vermag als der leistungsstärkste Computer mit roher Rechenkraft?

**C. Die alternierende harmonische Reihe**

Ein wahrhaft kniffliger Fall ist die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Wir berechnen ihren Wert  $s$  auf zwei Arten:

- 1. Art:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \dots \quad [5.2]$$

Indem wir jeden Summanden halbieren, erhalten wir

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \frac{1}{20} + \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{26} - \frac{1}{28} + \frac{1}{30} - \frac{1}{32} + \frac{1}{34} - \frac{1}{36} + \dots$$

Diese beiden Gleichungen schreiben wir jetzt so auf, dass Brüche mit gleichem Nenner untereinander stehen

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \dots$$

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{18} - \dots$$

und zählen untereinander stehende Terme zusammen. Dabei entstehen auch Nullen (z. B.  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ), die wir aber nicht aufschreiben. Resultat:

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \frac{1}{17} \dots$$

Für eine bessere Übersicht ordnen wir die Zahlen rechts vom Gleichheitszeichen nach ihren Nennern:

$$\frac{3}{2}s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots \quad [5.3]$$

## 5. Reihen

Wer aufmerksam kontrolliert hat, wird sich fragen, woher der Bruch  $-\frac{1}{10}$  kommt. Die Antwort: Wenn man die Reihe für  $s$  und die Reihe für  $\frac{1}{2}s$  noch ein wenig fortsetzt, erhält man in beiden Reihen je einen Summanden  $-\frac{1}{20}$ , und die Summe dieser beiden Summanden ist  $-\frac{1}{10}$ , genau jener fragliche Bruch. Es ist eben so, dass die negativen Summanden von immer weiter hinten nach vorne geholt werden müssen. Verblüffenderweise stimmt das Resultat [5.3] unserer kleinen Rechnung genau mit der ursprünglich zu bestimmenden Summe  $s$  bei [5.2] überein:

$$\frac{3}{2}s = s.$$

Daraus folgt nun  $s=0$ , d. h., die alternierende harmonische Reihe muss den Wert 0 haben.

- 2. Art:

$$s = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{9} - \frac{1}{10}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{11} - \frac{1}{12}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{13} - \frac{1}{14}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{15} - \frac{1}{16}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{17} - \frac{1}{18}}_{>0} + \dots,$$

d. h., es ist sicher  $s > \frac{1}{2}$ .

Welches Resultat ist richtig:  $s=0$  oder  $s > \frac{1}{2}$ ? Zur Beantwortung dieser Frage setzen wir wieder rohe Computerkraft ein:

$n$	$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i}$	Graph von $(s_n)$ für $n=1, 2, \dots, 105$
1	1.000000...	
10	0.645634...	
100	0.688172...	
1'000	0.692647...	
10'000	0.693097...	
100'000	0.693142...	
1'000'000	0.693146...	
10'000'000	0.693147...	
100'000'000	0.693147...	
1'000'000'000	0.693147...	

Damit ist es naheliegend, dass die 2. Art die richtige ist. Man kann zeigen, dass das stimmt und der Grenzwert  $\ln 2$  ist.

### 5.6.2 Satz

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert gegen  $\ln 2$ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2 = 0.693147\dots$$

Beweis

Der Beweis übersteigt unsere derzeitigen Möglichkeiten. Er folgt bei Beispiel 34.6.1 (2) im Band *Analysis 7*. ■

Weniger naheliegend ist, was bei der 1. Art schief läuft. Die Antwort ist verblüffend: Beim Berechnen der Summe einer Reihe gelten nicht mehr alle Rechenregeln, die uns von der Addition nur endlich vieler Zahlen her vertraut sind!

Im vorliegenden Fall: Bei der Addition von *endlich* vielen Zahlen gilt das Kommutativgesetz, d. h., man darf die Reihenfolge dieser Zahlen beliebig umstellen:

$$a+b+c = b+a+c = c+a+b = \dots$$

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$$

Beim Berechnen der Summe einer Reihe gilt das Kommutativgesetz nur noch dann, wenn man *endlich* viele Zahlen umstellt. Sobald man *unendlich* viele Zahlen umstellt, kann sich das Resultat ändern! Genau das geschieht, wenn wir bei [5.3] die Brüche neu sortieren.

Es kommt aber noch dicker. Die alternierende harmonische Reihe hat eine fast schon fantastisch anmutende Eigenschaft: Wir können ihre Brüche so umstellen, dass die neue Reihe irgendeinen beliebigen *vorgegebenen* Wert annimmt!

Dazu teilen wir die Summanden in zwei Gruppen auf: die „Plus-Gruppe“ umfasst alle Brüche mit positivem Vorzeichen, also

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots,$$

die „Minus-Gruppe“ umfasst alle Brüche mit negativem Vorzeichen, also

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}, \dots$$

Wir zeigen nun, wie man durch geschicktes Anordnen aller dieser Brüche eine Reihe mit dem Wert 1.2 erzeugen kann.

Dazu nehmen wir die ersten paar Brüche aus der „Plus-Gruppe“, und zwar so viele, bis ihre Summe erstmals 1.2 überschreitet:

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.333333$$

Nun fügen wir so lange Brüche aus der „Minus-Gruppe“ dazu, bis die Summe gerade wieder unter 1.2 fällt:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \approx 0.833333$$

Nun fügen wir wieder so lange Brüche aus der „Plus-Gruppe“ dazu, bis die Summe gerade wieder über 1.2 klettert. Dazu dürfen wir aber nur Brüche einsetzen, die wir nicht schon verwendet haben:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{811}{630} \approx 1.287302$$

Es folgen wieder so lange noch nicht verwendete Brüche aus der „Minus-Gruppe“, bis die Summe wieder unter 1.2 fällt:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \approx 1.037302$$

Fährt man so fort, erhält man der Reihe nach

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1.205134$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} \approx 1.115390$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} \approx 1.240880$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{8} \approx 1.115880$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{8} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \approx 1.216131$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{8} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{10} \approx 1.116131$$

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{8} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \frac{1}{10} + \frac{1}{23} + \frac{1}{25} + \frac{1}{27} \approx 1.236646$$

Dieses Verfahren liefert eine Reihe, die sehr langsam gegen 1.2 konvergiert.

Es ist bedeutsam, dass die Summe aller Zahlen der „Plus-Gruppe“  $+\infty$  ist, die Summe aller Zahlen der „Minus-Gruppe“ dagegen  $-\infty$ . Nur dadurch ist garantiert, dass man stets genügend „Plus-Zahlen“ und „Minus-Zahlen“ hat, um die Summe nach Bedarf zu vergrößern oder zu verkleinern. Der Beweis über diese Eigenschaft der „Plus-Gruppe“ und der „Minus-Gruppe“ ist eine Übungsaufgabe.

## 5.7 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

### 5.7.1 Beispiele

Berechnen Sie: (1)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{144}{4^i}$

(2)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$

(3)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$

(1) `sumseq(144/4^i ►, i, 1, infinity)`

(2) `sumseq(1/i^2 ►, i, 1, infinity)`

(3) `sumseq(1/i, i, 1, infinity)`   
 Erstaunlicherweise wird die harmonische Reihe nicht erkannt.

The screenshot shows a CAS window with the following results:

- For (1):  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{144}{4^i}\right) = 48$
- For (2):  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$
- For (3):  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)$  (The calculator does not recognize this as a known series and displays the formula instead of a value.)

## 5.8 Übungen

### A. Fragen zum Grundstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

- Was ist eine Reihe, was eine Teilsummenfolge? Was ist die Summe einer Reihe?
- Welches ist die Summe einer arithmetischen Reihe?
  - Welches ist die Summe einer geometrischen Reihe?
- Wie kann man periodische Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche verwandeln?

### B. Fragen zum Ergänzungsstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

- Welches ist die Summe der harmonischen Reihe?
  - Welches ist die Summe der alternierenden harmonischen Reihe?

### C. Aufgaben zum Grundstoff

**Zu den Aufgaben 1. bis 3.:** Gegeben sind die ersten beiden Glieder einer geometrischen Folge. Berechnen Sie die Summe aller (d. h. unendlich vieler) Glieder.

1. a) 2, 1                      b) 1, 2                      c) 3, -2  
     d) 10, 9                    e) -5, 4                    f) -100, -99.99
2. a) 0.2, 0,02                b) 0.02, 0.2                c) -1, -0.2  
     d) -1, 0.2                e)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$                     f)  $-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}$
3. a)  $b, \frac{2}{3}b$                     b)  $1, a$  ( $-1 < a < 1$ )        c)  $1, -a$  ( $-1 < a < 1$ )  
     d)  $1, c^3$  ( $-1 < c < 1$ )    e)  $1, \frac{1}{d}$  ( $|d| > 1$ )        f)  $f, \frac{f}{g}$  ( $|g| > 1$ )
4. Von einer geometrischen Folge sind zwei der vier Werte  $a_1, a_2, q$  und  $s$  gegeben. Berechnen Sie die beiden anderen.  
 a)  $q=0.75, s=32$               b)  $q=-0.4, a_2=5.6$             c)  $q=0.7, s=15$
5. a) Bei einer geometrischen Folge mit  $q=0.7$  ist  $s$  um 35 grösser als  $a_1$ . Berechnen Sie  $a_1$ .  
 b) Bei einer geometrischen Folge mit  $q=-0.7$  ist  $s$  um 35 kleiner als  $a_1$ . Berechnen Sie  $a_1$ .
6. Bei einer geometrischen Folge ist  $s$  das  $k$ -Fache von  $a_1$ . Wie gross ist  $q$ ?  
 a)  $k=2$                       b)  $k=0.8$                       c) allgemeine Lösung
7. Verwandeln Sie den Dezimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch.  
 a)  $0.\overline{2}$                       b)  $0.\overline{234}$                       c)  $0.\overline{234}$   
 d)  $2.\overline{71828}$                 e)  $0.\overline{9}$                       f)  $0.\overline{869}$

**Zu den Aufgaben 8. bis 13.:** Gegeben sind die ersten paar Glieder einer Folge  $(a_n)$ .

- a) Liegt eine arithmetische Folge vor? Eine geometrische Folge? Eine sonstige Folge?  
 b) Berechnen Sie  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 c) Berechnen Sie  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .
8. 2400, -1200, 600, -300, ...  
 9. 100, 95, 90, 85, ...  
 10. 106, 112, 118, 124, ...  
 11. 0.01, 0.02, 0.04, 0.08, ...  
 12.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$   
 13.  $1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{3} - \frac{1}{5}, \frac{1}{4} - \frac{1}{6}, \dots$
14. Berechnen Sie:              a)  $\sum_{i=4}^{\infty} 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^i$                       b)  $\sum_{i=1}^{\infty} 0.6^i - \sum_{i=1}^{10} 0.6^i$
15. Ein Gummiball wird aus 6.00 m Höhe fallen gelassen und springt 4.80 m hoch, fällt wieder zu Boden usw.  
 a) Nach dem wievielten Aufprall springt er nur noch weniger als 1 cm hoch?  
 b) Welchen Gesamtweg legt er zurück, wenn man ihn ungestört hüpfen lässt?  
 c) Welches ist die Summe aller seiner unendlich vielen Fall- und Steigzeiten?  
 Tipp: Fallzeit aus Höhe  $h =$  Steigzeit bis Höhe  $h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  mit  $g \approx 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .
16. Wir nehmen an, dass alle Menschen, Firmen und Organisationen eines Landes einen festen Anteil  $q$  ( $0 < q < 1$ ) ihrer Einnahmen wieder ausgeben; der Rest wird gespart. Ein Unternehmer lässt für einen Geldbetrag  $G$  eine Maschinenfabrik bauen.  
 a) Die Erstempfänger dieses Betrages sind Maurer, Installateure, Maschinenbauer usw.; welchen Betrag geben sie gemäss der getroffenen Annahme aus?



- b) Welchen Betrag geben die Zweitempfänger insgesamt aus?  
 c) Welchen Betrag geben die n-ten Empfänger insgesamt aus?  
 d) Welchen Betrag haben der Unternehmer und die ersten n Empfänger insgesamt ausgegeben?  
 e) Welche Gesamtausgaben S werden für  $n \rightarrow \infty$  durch den ursprünglichen Geldbetrag G ausgelöst?  
 f) Es sei  $G = \text{CHF } 15'000'000$  und  $q = 0.9$ . Welche Gesamtausgaben S werden ausgelöst? Was ändert sich in unsicheren Zeiten, wenn mehr gespart wird und q auf 0.75 sinkt?
17. Für welche Werte von y konvergiert die geometrische Reihe?  
 a)  $\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^3 + \dots$     b)  $\frac{1}{4} + y + 4y^2 + 16y^3 + \dots$     c)  $(y-3) + (y-3)^2 + (y-3)^3 + \dots$   
 d)  $1 - y^2 + y^4 - y^6 + \dots$     e)  $1 - y^3 + y^6 - y^9 + \dots$     f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y-7)^n}{2^n}$

## D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

- Von einer geometrischen Folge kennt man  $a_1 = 36$  und  $a_3 = 4$ . Berechnen Sie  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .
- Von einer geometrischen Folge kennt man  $a_2 = 7$  und  $s = 64$ . Berechnen Sie  $a_3$ .
- Die Summe der ersten vier Glieder einer geometrischen Folge ist 369, die Summe aller übrigen Glieder ist 256. Berechnen Sie  $a_1$  und  $a_6$ .
- Die Summe aller Glieder einer geometrischen Folge ist 15. Addiert man nur die Glieder mit ungeradem Index, so erhält man 25. Berechnen Sie die ersten drei Glieder der vollständigen Folge.
- Wie viele Glieder der geometrischen Folge 100, 90, 81, ... muss man addieren, damit sich ihre Summe um weniger als 0.01 von der Summe aller Glieder unterscheidet?
- Es ist  $\sum_{i=2}^{\infty} (c+1)^{-i} = 2.25$ . Wie gross ist c?
- Von einer Folge  $(a_n)$  kennt man  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n-1}{n+1}$ . Bestimmen Sie  $a_i$  und  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .
- Für welche Werte von y konvergiert die geometrische Reihe?  
 a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{y}{y+2} \right)^{n-1}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2y-5}^n$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 y)^n$   
 d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n y}{3^n}$     e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan^n y$     f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{n-1} y, \quad y \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$
- Konvergiert die Folge  $(a_n)$ ? Konvergiert die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ? Falls ja, geben Sie den Grenzwert  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  und die Summe  $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$  an.  
 a)  $a_n = \frac{5}{2^n}$     b)  $a_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^n}$     c)  $a_n = e^{-n}$   
 d)  $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

10. Eine Person nimmt jeden Morgen eine gleichbleibende Dosis  $d$  eines Giftes auf, und im Verlauf des Tages wird ein bestimmter Anteil  $p$  ( $0 < p < 1$ ) des im Körper insgesamt vorhandenen Giftes ausgeschieden. Im Körper verbleibt der Anteil  $r = 1 - p$  ( $0 < r < 1$ ).

- a) Wie viel Gift  $g_n$  ist nach  $n$  Tagen im Körper vorhanden?  
 b) Berechnen Sie  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ .

11. Eine geometrische Folge  $(a_n)$  hat als erstes Glied  $a_1 = 1$ , und die zugehörige Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{ konvergiert gegen } t.$$

Aus dieser Folge wird eine neue gebildet, die nur jedes zweite Glied enthält, also  $a_2, a_4, \dots$ . Drücken Sie die Summe aller Glieder der neuen Folge durch  $t$  aus.

### Aus der Geometrie

12.  $Q_1$  ist ein Quadrat mit Seitenlänge  $a = 10$  cm.

$Q_{i+1}$  entsteht aus  $Q_i$ , indem man bei  $Q_i$  die Mittelpunkte benachbarter Seiten miteinander verbindet. Dieses Verfahren wird unendlich oft fortgesetzt.

Berechnen Sie:

- a) die Summe aller Quadratumfange,  
 b) die Summe aller Quadratflächen.

13. Nun betrachten wir die Quadrate der vorherigen Aufgabe als Grundrisse von (unendlich vielen) Würfeln, welche zu einem Turm aufeinander gestapelt werden.

Berechnen Sie:

- a) die Höhe des Turms,  
 b) das Volumen des Turms.

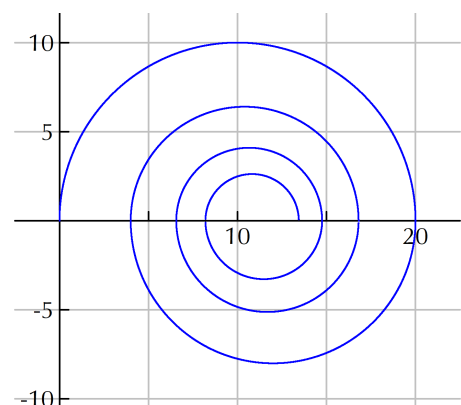
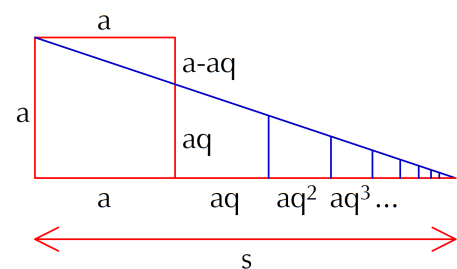
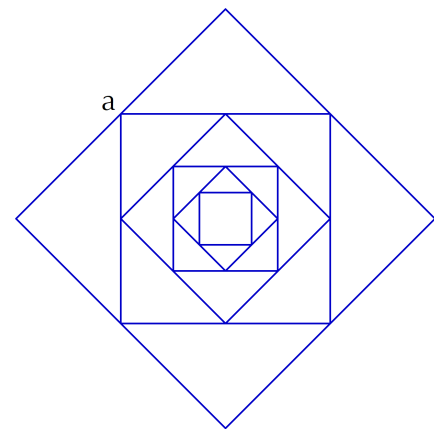
14. Bei allen (unendlich vielen) Trapezen, die in der Figur rechts vorkommen, sind die beiden senkrecht aufeinander stehenden Seiten gleich lang. Beweisen Sie mithilfe dieser Figur:

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Tipp: Arbeiten Sie mit Figuren, die zueinander ähnlich sind.

15. Eine Spirale beginnt im Punkt  $O(0, 0)$ . Sie ist gemäss der Figur rechts aus unendlich vielen Halbkreisen zusammengesetzt, deren Durchmesser eine geometrische Folge mit  $q = \frac{4}{5}$  bilden. Der Durchmesser  $d_1$  des grössten Halbkreises misst 20 cm.

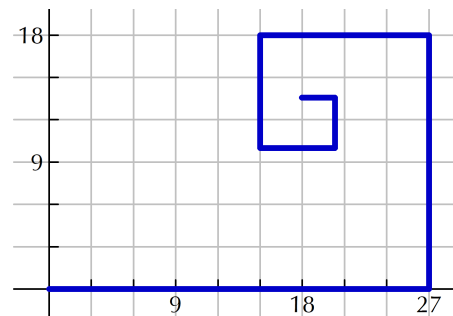
- a) Wie lang ist die ganze Spirale?  
 b) Die Spirale windet sich unendlich oft um einen Punkt  $P(x, y)$ . Welches sind die Koordinaten von  $P$ ?



## 5. Reihen

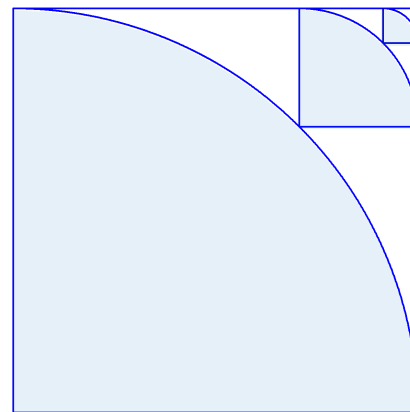
16. Ein Streckenzug beginnt im Punkt  $O(0, 0)$ . Er ist gemäss der Figur rechts aus unendlich vielen Strecken zusammengesetzt, deren Längen eine geometrische Folge bilden.

- Wie lang ist der ganze Streckenzug?
- Der Streckenzug windet sich unendlich oft um einen Punkt  $P(x, y)$ . Welches sind die Koordinaten von  $P$ ?



17. Einem Quadrat mit der Seitenlänge  $a=10$  cm werden gemäss der Darstellung nebenan unendlich viele Viertelkreise  $V_1, V_2, V_3, \dots$  einbeschrieben.

Welches ist die gesamte Fläche aller Viertelkreise?



18. Einem Quadrat mit der Seitenlänge  $a=16$  cm wird ein Kreis einbeschrieben, diesem ein Quadrat, diesem wieder ein Kreis usw. Dieses Verfahren wird unendlich oft fortgesetzt.

Berechnen Sie:

- die gesamte Fläche aller Quadrate,
- den gesamten Umfang aller Quadrate,
- die gesamte Fläche aller Kreise,
- den gesamten Umfang aller Kreise.

19. Lösen Sie Aufgabe 18. allgemein für die Seitenlänge  $a$ .

20. Einem Würfel mit der Seitenlänge  $a=16$  cm wird eine Kugel einbeschrieben, dieser ein Würfel, diesem wieder eine Kugel usw. Dieses Verfahren wird unendlich oft fortgesetzt.

Berechnen Sie:

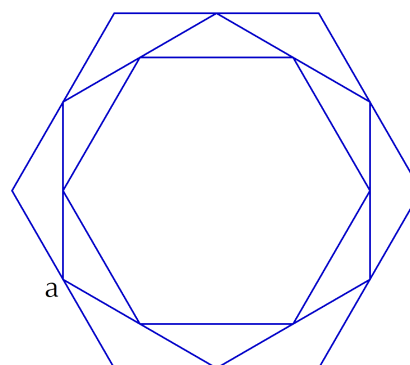
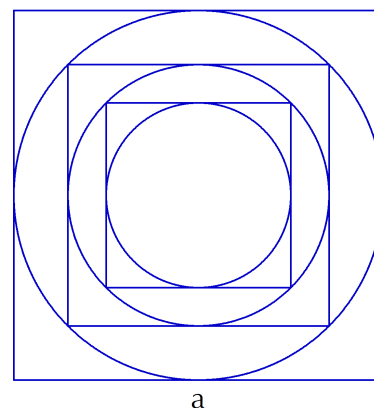
- das gesamte Volumen aller Würfel,
- die gesamte Oberfläche aller Würfel,
- das gesamte Volumen aller Kugeln,
- die gesamte Oberfläche aller Kugeln.

21. Lösen Sie Aufgabe 18. allgemein für die Seitenlänge  $a$ .

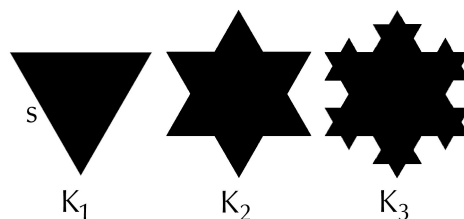
22.  $S_1$  ist ein regelmässiges Sechseck mit der Seitenlänge  $a$ .  $S_{i+1}$  entsteht aus  $S_i$ , indem man bei  $S_i$  die Mittelpunkte benachbarter Seiten miteinander verbindet. Dieses Verfahren wird unendlich oft fortgesetzt.

Drücken Sie durch  $a$  aus:

- die Summe aller Sechseckumfänge,
- die Summe aller Sechseckflächen.



23. Koch'sche<sup>1</sup> Insel:  $K_1$  ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge  $s$ .  $K_{i+1}$  entsteht aus  $K_i$ , indem jede Seite von  $K_i$  gedrittelt und am mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck angesetzt wird.



Bezeichnungen:

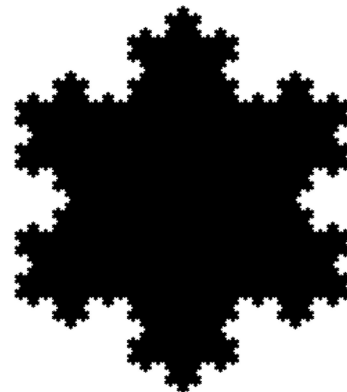
$U_n$  = Umfang von  $K_n$ ,

$A_n$  = Fläche von  $K_n$ .

Die Koch'sche Insel ist die „Grenzwertfigur“  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ , die Koch'sche Schneeflockenkurve ist der Rand bzw. die „Küstenlinie“ dieser Insel.

a) Bestimmen Sie  $U_n$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ .

b) Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .



## E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. Suchen Sie einen geschlossenen Ausdruck für ...

a)  $A = 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \dots$ ,  $|r| < 1$  Tipp: Multiplizieren Sie  $A$  mit  $(1-r)$ .

b)  $B = s - 2s^2 + 3s^3 - 4s^4 + \dots$ ,  $|s| < 1$

2. Beweisen Sie die Aussagen über die Zahlen der „Plus-Gruppe“ und die der „Minus-Gruppe“ bei der alternierenden harmonischen Reihe in Abschnitt 5.6.C.:

a)  $\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{1}{2i} = -\infty$

b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} = \infty$

3. Gegeben ist die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ . Beweisen Sie, oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel: Wenn der Abstand  $|a_{n+1} - a_n|$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Summanden beliebig klein wird, konvergiert die Reihe.

## F. Aufgaben für Freaks

1. Vom griechischen Mathematiker und Philosophen Zenon<sup>2</sup> von Elea sind einige Paradoxien überliefert:

A) Ein fliegender Pfeil ist in jedem Moment in Ruhe, bewegt sich also nicht.

B) Man kann zwar auf eine Wand zugehen, wird diese aber nie erreichen. Denn dazu müsste man zuerst den halben Weg zur Wand zurücklegen, dann vom neuen Abstand wieder die Hälfte, vom neuen Abstand wieder die Hälfte usw. Dieses „Verfahren“ kann immer weiter fortgesetzt werden und kommt nie zu einem Ende.

C) Der griechische Held Achill und eine Schildkröte veranstalten einen Wettlauf. Gnädigerweise gewährt Achill der Schildkröte einen Vorsprung von einigen Metern. Beide starten gleichzeitig. Wenn Achill dort angelangt ist, wo die Schildkröte ge-

<sup>1</sup> von Koch Nils Fabian Helge, schwedischer Mathematiker, 25.1.1870 (Stockholm) bis 11.3.1924 (Danderyd, Schweden)

<sup>2</sup> Zenon von Elea, griechischer Mathematiker und Philosoph, ca. 490 v. Chr. (Elea, Italien) bis ca. 425 (Elea oder Syrakus, Italien)

startet ist, ist die Schildkröte bereits ein bisschen weiter gekrabbelt. Wenn Achill auch diesen Weg zurückgelegt hat, ist die Schildkröte aber wieder ein bisschen weiter gekrabbelt usw. Dieses „Verfahren“ kann immer weiter fortgesetzt werden und kommt nie zu einem Ende, d. h., Achill holt die Schildkröte nie ein und kann sie erst recht nie überholen.

- a) Was meinen Sie zu den Paradoxien A), B) und C), welche unserer Alltagserfahrung doch klar widersprechen?
  - b) Suchen sie weitere Paradoxien von Zenon und erläutern Sie sie.
2. Damit man entscheiden kann, ob eine Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert oder nicht, gibt es diverse Tests („Kriterien“):
- a) das Majorantenkriterium und das Minorantenkriterium,
  - b) das Quotientenkriterium,
  - c) das Wurzelkriterium.
- Begründen Sie diese Kriterien, und illustrieren Sie sie an geeigneten Beispielen.
3. Hier „beweisen“ wir, dass  $0=1$  ist.

$$\begin{aligned}
 0 &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
 &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\
 &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
 &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\
 &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Wo steckt der Fehler?

4.  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^i} = ?$