36. Ergänzung: Was ist eine Differentialgleichung?

36.1 Überblick

Häufig möchte man einen Vorgang in Natur oder Technik durch eine Funktion beschreiben. Das Auffinden der passenden Funktion f erweist sich aber oft als schwierig; es ist einfacher, einige Funktionseigenschaften anzugeben, anhand derer f bestimmt werden kann. Macht man z. B. Angaben darüber, wie sich die Funktion f ändert, so erhält man eine Differentialgleichung. In dieser können x, die gesuchte Funktion f sowie ihre Ableitungen f′, f″, … auftreten. Ein Beispiel für eine Differentialgleichung ist $f'(x)=2\cdot f(x)$. Gesucht sind alle Funktionen f, welche diese Differentialgleichung erfüllen.
In diesem Kapitel geht es um folgende Fragen:
1. Wie konstruiert man eine Differentialgleichung?
2. Wie findet man in einfachen Fällen eine oder mehrere Lösungsfunktionen?
3. Wie kann man eine Differentialgleichung graphisch darstellen und lösen?
4. Wie kann man eine Differentialgleichung näherungsweise lösen?

36.2 Beispiele für Differentialgleichungen

36.2.1 Beispiel: Unsere erste Differentialgleichung
1. Welche Funktionen erfüllen die Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$, kurz $f'=f$?
2. Welche Funktion erfüllt zusätzlich die Bedingung $f(0)=-3$?

1. Lösung der Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$
Eine leicht erkennbare Lösung ist

$$f_1 : x \mapsto 0;$$

sie erfüllt die Differentialgleichung, denn es ist $f_1(x)=0$ und $f_1'(x)=0$.
Eine weitere Lösung findet man mit einem Blick in eine Tabelle mit Ableitungen: Die Funktion

$$f_2 : x \mapsto e^x$$

hat die Ableitung $f_2' : x \mapsto e^x$ hat. Gibt es noch weitere Lösungen? Wir variieren die Funktion f_1 und f_2 und hoffen, auf weitere Lösungen zu stossen:
$g(x) = 2 \Rightarrow g'(x) = 0$, also $g'(x) \neq g(x)$, d. h., g ist keine Lösung der Differentialgleichung;
$h(x) = e^x + 3 \Rightarrow h'(x) = e^x$, also $h'(x) \neq h(x)$, h ist keine Lösung der Differentialgleichung;
$i(x) = 7e^x \Rightarrow i'(x) = 7e^x$, d. h., h ist eine Lösung der Differentialgleichung;
$j(x) = e^{2x} \Rightarrow j'(x) = 2\cdot e^{2x}$, d. h., i ist keine Lösung der Differentialgleichung.
Wir verallgemeinern die Lösungsfunktion i durch Einsetzen eines beliebigen Faktors C:
$k(x) = C\cdot e^x \Rightarrow k'(x) = C\cdot e^x$, d.h., k ist eine Lösung der Differentialgleichung und zwar unabhängig davon, welchen Wert C hat. Für $C=0$ erhält man f_1, für $C=1$ hingegen f_2.
Damit haben wir gefunden:

© Pythagoras Lehrmittel

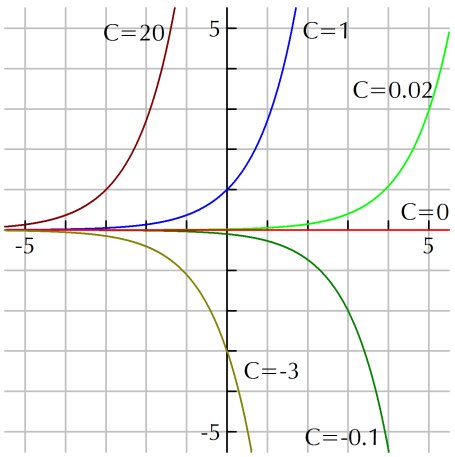
Die Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$ hat unendlich viele Lösungsfunktionen. Diese sind von der Bauart

$$f: x \mapsto C \cdot e^x,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Die Lösungen bilden also eine Funktionenschar. Einige ihrer Funktionen sind nebenan dargestellt.
Die Funktionen

$$f: x \mapsto C \cdot e^x$$

bilden die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$. Wir werden bei Aufgabe D.15. sehen, dass es keine weiteren Lösungsfunktionen gibt.



2. Lösung der Differentialgleichung $f'(x)=f(x)$ unter der Zusatzbedingung $f(0)=-3$
Wir wählen den Parameter C so, dass $f(0)=-3$ wird:

$$f(0) = C \cdot e^0 = -3 \;\Rightarrow\; C = -3$$

und finden als *spezielle Lösung* die Funktion

$$f: x \mapsto -3 \cdot e^x.$$

Was wir an diesem Beispiel gesehen haben, ist typisch für Differentialgleichungen:

- Die *allgemeine Lösung* einer Differentialgleichung besteht aus unendlich vielen Funktionen, welche durch einen oder mehrere Parameter C, C_1, C_2, … beschrieben werden können.
- Stellt man zusätzliche Bedingungen an die Funktion f, so kann man C, C_1, C_2, … bestimmen und erhält eine *spezielle Lösung* der Differentialgleichung.

36.2.2 Beispiel: Vermehrung einer Bakterienkultur
Eine Bakterienkultur besteht zum Zeitpunkt $t=0$ aus $N(0)=2'000$ Individuen. Wie viele Bakterien sind nach 1, 2, 3, 4, t Stunden vorhanden?

1. Leiten Sie eine Differentialgleichung her für N(t), die Anzahl der nach t Stunden vorhandenen Bakterien. Da unklar ist, nach welchem mathematischen Gesetz sich die Bakterien vermehren, entwickeln Sie zur Lösung der Aufgabe ein Modell. Dieses soll auf folgenden plausiblen Annahmen basieren:
   (1) Die Änderung der Population – konkret der Zuwachs ΔN im kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ – ist proportional zur Anzahl N(t) der bereits vorhandenen Bakterien: Je mehr Bakterien schon leben, desto mehr neue Bakterien entstehen durch Zellteilung. Δt muss deshalb klein sein, weil die Anzahl der Bakterien jederzeit *wachsen kann.*
   (2) Der Zuwachs ΔN im kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ ist auch proportional zur Zeit Δt: In der doppelten Zeit entstehen doppelt so viele neue Bakterien.
   (3) Der Zuwachs wird auf absehbare Zeit nicht z. B. durch Platzmangel, ungenügendes Nahrungsangebot oder Medikamente gebremst.
   (4) Auf absehbare Zeit sterben keine Bakterien.
   (5) Es findet keine Zu- oder Abwanderung statt.

[36.1]

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der bei 1. gefundenen Differentialgleichung.
3. Berechnen Sie die spezielle Lösung der bei 1. gefundenen Differentialgleichung, indem Sie die Anfangsbedingung $N(0)=2000$ berücksichtigen.
4. Berechnen Sie eine konkrete Prognose für N(1), N(2), N(3), N(4) und stellen Sie die Entwicklung graphisch dar.

Alle getroffenen Annahmen sind Vereinfachungen der Wirklichkeit, damit das Modell nicht zu kompliziert wird. Jede Vereinfachung kann aber dazu führen, dass das Modell nicht gut mit der Wirklichkeit übereinstimmt oder sogar unbrauchbar wird!

1. Herleiten der Differentialgleichung für N(t)

Gemäss den Annahmen (1) und (2) ist der Zuwachs ΔN im *kleinen Zeitintervall* $[t, t+\Delta t]$ proportional zur Anzahl $N(t)$ der bereits vorhandenen Bakterien und zur Zeitspanne Δt, für welche der Zuwachs berechnet wird. Dies führt zum Ansatz

$$\Delta N = N(t+\Delta t) - N(t) = a \cdot N(t) \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad a > 0. \qquad \textbf{[36.2]}$$

Der Faktor a ist ein Mass dafür, wie schnell die Zahl der Bakterien zunimmt.

Eine einfache Plausibilitätskontrolle des Ansatzes [36.2]: Eine Verdreifachung von $N(t)$ bewirkt eine Verdreifachung von ΔN:

$$a \cdot 3N(t) \cdot \Delta t = 3 \cdot \underbrace{a \cdot N(t) \cdot \Delta t}_{\Delta N} = 3 \cdot \Delta N,$$

und eine Verdopplung von Δt bewirkt eine Verdoppelung von ΔN:

$$a \cdot N(t) \cdot 2\Delta t = 2 \cdot \underbrace{a \cdot N(t) \cdot \Delta t}_{\Delta N} = 2 \cdot \Delta N.$$

Also erfüllt der Ansatz [36.2] für ΔN die geforderten Proportionalitätseigenschaften.

Die Annahmen (3), (4) und (5) besagen, dass keine weiteren Einflüsse zu berücksichtigen sind. Deshalb ändert sich am Ansatz [36.2] nichts mehr.

Teilt man [36.2] durch Δt, folgt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = a \cdot N(t).$$

Weil das Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ klein sein soll und die Bakterien sich jederzeit vermehren können, lassen wir $\Delta t \to 0$ streben:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = a \cdot N(t).$$

Links steht die momentane Wachstumsrate; diese ist gemäss Zusammenfassung 19.2.8(2) und Definition 19.3.1(4) (Band *Analysis 4*) nichts anderes als die Ableitung $N'(t)$. Also erhalten wir die Differentialgleichung

$$N'(t) = a \cdot N(t); \qquad \textbf{[36.3]}$$

dazu kommt die Anfangsbedingung

$$N(0) = 2'000. \qquad \textbf{[36.4]}$$

2. Berechnen der allgemeinen Lösung von [36.3]

Wir lösen die Differentialgleichung $N'(t) = a \cdot N(t)$ durch systematisches Probieren. Um die Gesetzmässigkeit besser zu erkennen, behandeln wir zunächst einen Spezialfall.

- Im *Spezialfall a=1* stimmen die Funktion $N(t)$ und ihre Ableitung $N'(t)$ überein. Wir können daher auf Beispiel 36.2.1(1) zurückgreifen und die dort gefundene Lösung übertragen:

  $$N : t \mapsto C \cdot e^t$$

  ist die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung $N'(t) = N(t)$.
- Für *beliebiges a* findet man durch systematisches Probieren die Lösung

  $$N(t) = e^{a \cdot t}.$$

  Wie im Spezialfall a=1 gibt es auch hier weitere Lösungen, nämlich jede Funktion der Form

  $$N : t \mapsto C \cdot e^{a \cdot t}, \qquad \textbf{[36.5]}$$

  denn es gilt

© Pythagoras Lehrmittel

$$N'(t) = \left(C \cdot e^{a \cdot t}\right)' = C \cdot \left(e^{a \cdot t}\right)' \overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{regel}}{=}} C \cdot a \cdot e^{a \cdot t} = a \cdot N(t).$$

$N : t \mapsto C \cdot e^{a \cdot t}$ ist die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung $N'(t) = a \cdot N(t)$.

3. Berechnen der speziellen Lösung von [36.3] mit der Anfangsbedingung [36.4]

- Wir passen den Faktor C in [36.5] so an, dass auch die Anfangsbedingung $N(0) = 2'000$ erfüllt ist. Aus

$$N(0) \overset{[36.5]}{=} C \cdot \underbrace{e^{a \cdot 0}}_{1} = 2'000$$

folgt $C = 2'000$, und die Lösungsfunktion für die untersuchte Bakterienkultur ist

$$N : t \mapsto 2'000 \cdot e^{a \cdot t}.$$

Dies ist die *spezielle Lösung* der Differentialgleichung $N'(t) = a \cdot N(t)$ mit der Anfangsbedingung $N(0) = 2000$.

4. Berechnen von N(1), N(2), N(3) und N(4) und Darstellen der Entwicklung

Bevor man die Zahl der Bakterien prognostizieren kann, muss man a kennen. Wir nehmen an, Experimente hätten gezeigt, dass $a = \frac{1}{2}$ ist. Dann beschreibt die Funktion

$$N : t \mapsto 2'000 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t} \qquad \textbf{[36.6]}$$

das Wachstum der untersuchten Bakterienkultur. Durch Einsetzen in [36.6] findet man die gerundeten Werte

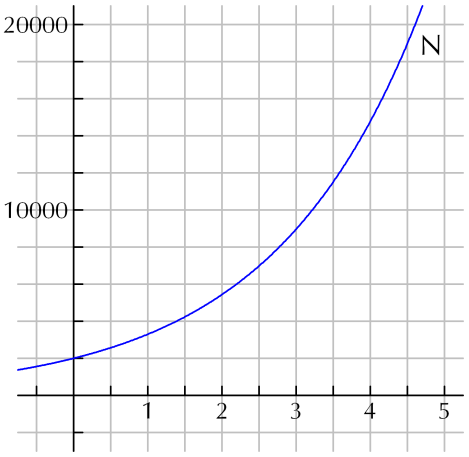
$$N(1) = 2'000 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3'297,$$

$$N(2) = 2'000 \cdot e^{1} \approx 5'437,$$

$$N(3) = 2'000 \cdot e^{\frac{3}{2}} \approx 8'963,$$

$$N(4) = 2'000 \cdot e^{2} \approx 14'778.$$

Im Sinne einer vernünftigen Genauigkeit rundet man diese Ergebnisse noch auf Hunderter oder Tausender.



Der Graph der Funktion $N : t \mapsto 2'000 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t}$ ist nebenan dargestellt.

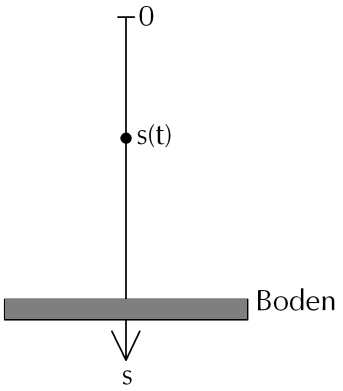
Mit Experimenten muss man nun überprüfen, ob die gefundene Funktion [36.6], welche aufgrund der fünf Annahmen bei [36.1] konstruiert worden ist, die Vermehrung der Bakterien in der Wirklichkeit gut beschreibt oder nicht.

Eine einfache Überlegung zeigt, dass fortwährendes exponentielles Wachstum unmöglich ist: Nach einem Tag ist die Population auf $3.255 \cdot 10^{8}$ Bakterien angewachsen, nach zwei Wochen auf $1.830 \cdot 10^{76}$ Bakterien und nach zwei weiteren Tagen auf $4.848 \cdot 10^{86}$ Bakterien. Diese Zahl entspricht etwa der heute geschätzten Zahl der Atome im ganzen Weltall!

Tatsächlich beschreibt die gefundene Funktion $N : t \mapsto 2'000 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t}$ die Entwicklung einer Population nur über einen begrenzten Zeitraum einigermassen genau. Dann bremsen die Faktoren, die bei den Annahmen (3), (4) und (5) ausgeschlossen wurden, das exponentielle Wachstum.

♦

36.2.3 Beispiel: Freier Fall ohne Luftwiderstand
Ein Körper fällt im luftleeren Raum zur Erde. Zu Beginn der Messung – d. h. zum Zeitpunkt t=0 – hat er die Geschwindigkeit v_0. Wie viele Meter s legt er in t Sekunden zurück?
(Die Zeit wird nur bis zum Aufprall des Körpers auf dem Boden gemessen.)
1. Leiten Sie eine Differentialgleichung für s(t) her.
2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der bei 1. gefundenen Differentialgleichung.
3. Berechnen Sie die spezielle Lösung der bei 1. gefundenen Differentialgleichung.



1. Herleiten der Differentialgleichung für s(t)
Aus der Physik weiss man, dass

$$v(t)=s'(t) \text{ und } a(t)=s''(t).$$

ist. Die Beschleunigung, welcher der Körper ausgesetzt ist, ist $g=9.81\ m/s^2$. So findet man die Differentialgleichung

$$s''(t) = g \qquad \textbf{[36.7]}$$

für die Funktion s. Die beiden Anfangsbedingungen sind

$$s(0)=0 \text{ und } v(0)=s'(0)= v_0. \qquad \textbf{[36.8]}$$

2. Berechnen der allgemeinen Lösung von [36.7]
Die Differentialgleichung [36.7] kann leicht durch Integration gelöst werden, weil nebst s'' weder die Funktion s noch eine weitere ihrer Ableitungen auftritt. Man erhält

$$s'(t) = g \cdot t + C_1 \qquad \textbf{[36.9]}$$

und

$$s(t)=\tfrac{1}{2}g \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2, \qquad \textbf{[36.10]}$$

wobei C_1 und C_2 geeignet zu wählende Konstanten sind. s ist die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung [36.7].

3. Berechnen der speziellen Lösung von [36.7] & [36.8]
Die spezielle Lösung finden wir durch Berücksichtigung der Anfangsbedingungen [36.8]:

$$s'(0) \overset{[36.9]}{=} g \cdot 0 + C_1 \overset{[36.8]}{=} v_0 \qquad \Rightarrow C_1 = v_0,$$

$$s(0) \overset{[36.10]}{=} \tfrac{1}{2}g \cdot 0^2 + \underbrace{v_0}_{C_1} \cdot 0 + C_2 \overset{[36.8]}{=} 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

und durch Einsetzen in [36.10] folgt für die *spezielle Lösung*

$$s(t)=\tfrac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t.$$

♦

36.2.4 Beispiel: Lernkurve
Sie lernen auf die nächste Prüfung. Zu Beginn geht es rasch voran, mit zunehmender Zeit aber immer langsamer: Sie werden müde, und am Schluss befassen Sie sich vor allem noch mit dem schwierigen, Ihnen nicht auf Anhieb verständlichen Stoff.
S ist die Menge des insgesamt zu lernenden Stoffs, L(t) ist die Menge des nach t Minuten bereits gelernten Stoffs und a>0 ist ein Mass für Ihre Lerngeschwindigkeit: Wenn Sie leicht lernen, ist a grösser, als wenn Ihnen das Thema nicht liegt oder sehr schwierig ist.
1. Leiten Sie mit plausiblen Annahmen eine Differentialgleichung für L(t) her.

© Pythagoras Lehrmittel

2. Zeigen Sie: Die Funktionen
$$L: t \mapsto S + C \cdot e^{-a \cdot t} \qquad \textbf{[36.11]}$$
sind Lösungen dieser Differentialgleichung.
3. Berechnen Sie mithilfe von 2. die spezielle Lösung der Differentialgleichung.
4. Spezialfall: Sie lernen S=50 englische Wörter, messen die Zeit t in Minuten, und a=0.04 beschreibt Ihr Lerntempo. Stellen Sie die Lernkurve graphisch dar.

1. Herleiten der Differentialgleichung für L(t)

Plausibel sind die folgenden Annahmen:

(1) L(0)=0: Sie haben kein Vorwissen und müssen den gesamten Stoff lernen.

(2) In einem *kleinen Zeitintervall* [t, t+Δt] ist der Zuwachs ΔL proportional zu Δt: Wenn Sie Δt verdoppeln, lernen Sie etwa doppelt soviel neuen Stoff.

(3) In einem *kleinen Zeitintervall* [t, t+Δt] ist der Zuwachs ΔL proportional zur Menge des noch zu lernenden Stoffs: Wenn $S - L(t)$ klein ist, ist auch ΔL klein.

Die Annahmen (2) und (3) liefern den Ansatz
$$\Delta L = L(t + \Delta t) - L(t) = a \cdot (S - L(t)) \cdot \Delta t \quad \text{mit} \quad a > 0. \qquad \textbf{[36.12]}$$
Division von [36.12] durch Δt führt auf
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{\Delta t} = a \cdot (S - L(t)),$$
und durch Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ erhalten wir die Differentialgleichung
$$L'(t) = a \cdot (S - L(t)). \qquad \textbf{[36.13]}$$
Annahme (1) liefert direkt die Anfangsbedingung
$$L(0) = 0. \qquad \textbf{[36.14]}$$

2. Kontrolle der Lösungen

Die linke Seite von [36.13] erhalten wir, indem wir [36.11] ableiten: $L'(t) = -a \cdot C \cdot e^{-a \cdot t}$.

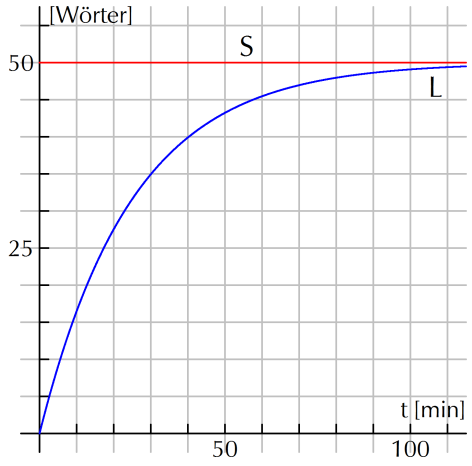
Auf der rechten Seite steht $a \cdot \left(S - L(t)\right) \overset{[36.11]}{=} a \cdot \left(S - \left[S + C \cdot e^{-a \cdot t}\right]\right) = a \cdot \left(-C \cdot e^{-a \cdot t}\right)$.

$L: t \mapsto S + C \cdot e^{-a \cdot t}$ ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $L'(t) = a \cdot (S - L(t))$. Wir werden später diese allgemeine Lösung sauber herleiten können.

3. Berechnen der speziellen Lösung mit der Anfangsbedingung L(0)=0
$$L(0) \overset{[36.11]}{=} S + C \cdot \underbrace{e^{-a \cdot 0}}_{1} = S + C \overset{[36.14]}{=} 0 \Rightarrow C = -S, \text{ d. h.}$$
$$L: t \mapsto S - S \cdot e^{-a \cdot t} = S(1 - e^{-a \cdot t}). \qquad \textbf{[36.15]}$$

4. Behandlung des Spezialfalls S=50 und a=0.04

Aus [36.15] folgt für S=50 und a=0.04
$$L: t \mapsto 50(1 - e^{-0.04 \cdot t}).$$
Der Graph dieser Funktion ist nebenan dargestellt.



♦

36.3 Grundlegende Begriffe für Differentialgleichungen

36.3.1 Definitionen

(1) Eine *Differentialgleichung* für die unbekannte Funktion f: $x \mapsto f(x)$ ist eine Gleichung, in der x, f(x), f′(x), f″(x), … auftreten können.

(2) Die *allgemeine Lösung einer Differentialgleichung* besteht aus allen Funktionen f, welche die Differentialgleichung erfüllen.

(3) Eine *Anfangsbedingung* ist eine zusätzliche Bedingung, welche die gesuchte Funktion f erfüllen muss. Eine *Anfangswertaufgabe* oder ein *Anfangswertproblem* besteht aus einer Differentialgleichung und einer Anfangsbedingung.

(4) Eine *spezielle oder partikuläre Lösung einer Differentialgleichung* ist eine Funktion f, welche nicht nur die Differentialgleichung, sondern auch eine oder mehrere Anfangsbedingungen erfüllt.

(5) Die *Ordnung einer Differentialgleichung* ist die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung von f.

Die Begriffe, illustriert an den Beispielen des letzten Abschnitts:

(1) Wir haben folgende Differentialgleichungen untersucht:

36.2.1 Unsere erste Differentialgleichung: $f'(x) = f(x)$,

36.2.2 Vermehrung einer Bakterienkultur: $N'(t) = a \cdot N(t)$,

36.2.3 Freier Fall ohne Luftwiderstand: $s''(t) = g = \text{konstant}$,

36.2.4 Lernkurve: $L'(t) = a \cdot (S - L(t))$.

(2) Bei den untersuchten Beispielen besteht die *allgemeine Lösung* aus unendlich vielen Funktionen. Dies kommt durch die frei wählbaren Zahlen C, C_1, C_2 zum Ausdruck:

36.2.1 Unsere erste Differentialgleichung: $f: x \mapsto C \cdot e^x$,

36.2.2 Vermehrung einer Bakterienkultur: $N: t \mapsto C \cdot e^{a \cdot t}$,

36.2.3 Freier Fall ohne Luftwiderstand: $s: t \mapsto \frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2$,

36.2.4 Lernkurve: $L: t \mapsto S + C \cdot e^{-a \cdot t}$.

(3) Die *Anfangswertaufgaben* waren:

36.2.1 Unsere erste Differentialgleichung: $f'(x) = f(x)$, $f(0) = -3$,

36.2.2 Vermehrung einer Bakterienkultur: $N'(t) = a \cdot N(t)$, $N(0) = 2'000$,

36.2.3 Freier Fall ohne Luftwiderstand: $s''(t) = g = \text{konstant}$, $s(0) = 0$ und $v(0) = v_0$,

36.2.4 Lernkurve: $L'(t) = a \cdot (S - L(t))$, $L(0) = 0$.

Oft beschreibt die Anfangsbedingung die Situation zur Zeit $t = 0$. Aber es sind auch andere Angaben möglich, z. B., dass der Graph der gesuchten Funktion f durch P(5, 2) verläuft oder an der Stelle $x = 7$ die Tangentensteigung 1 hat: $f(5) = 2$, $f'(7) = 1$.

(4) Die *speziellen oder partikulären Lösungen*, welche auch die Anfangsbedingungen erfüllen, waren:

36.2.1 Unsere erste Differentialgleichung: $f: x \mapsto -3 \cdot e^x$,

36.2.2 Vermehrung einer Bakterienkultur: $N: t \mapsto 2'000 \cdot e^{a \cdot t}$,

36.2.3 Freier Fall ohne Luftwiderstand: $s: t \mapsto \frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_0 \cdot t$,

36.2.4 Lernkurve: $L: t \mapsto S(1 - e^{-a \cdot t})$.

Bei den Beispielen 36.2.2 und 36.2.4 waren für den Parameter a bzw. die Parameter S und a konkrete Werte vorgegeben, welche es gestatten, die Lösungsfunktion für den konkreten Einzelfall noch genauer anzugeben:

© Pythagoras Lehrmittel

$$N: t \mapsto 2'000 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t}, \quad L: t \mapsto 50 \cdot (1 - e^{-0.04 \cdot t}).$$

(5) Die Differentialgleichungen der Beispiele 36.2.1, 36.2.2 und 36.2.4 haben Ordnung 1, weil die höchste auftretende Ableitung die erste Ableitung N′ bzw. L′ ist. Die Differentialgleichung von Beispiel 36.2.3 hat Ordnung 2, weil s″ auftritt.

36.4 Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung wie zum Beispiel y′(x)=x+y(x), kurz

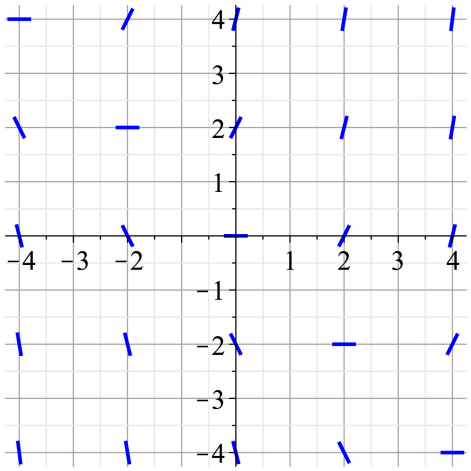
$$y' = x + y, \qquad \textbf{[36.16]}$$

kann man geometrisch folgendermassen deuten: Kennt man die Koordinaten x und y eines Punktes P, kann man für P gemäss [36.16] den Wert von y′ berechnen. Diese Ableitung interpretiert man als Steigung der Tangente im Punkt P(x, y) und trägt zur Veranschaulichung im Punkt P(x, y) einen kurzen Abschnitt der Tangente mit der Steigung y′ ein. Der Tangentenabschnitt zeigt den ungefähren Verlauf des Graphen einer speziellen Lösung der Differentialgleichung in der Nähe von P(x, y). Beispiele:

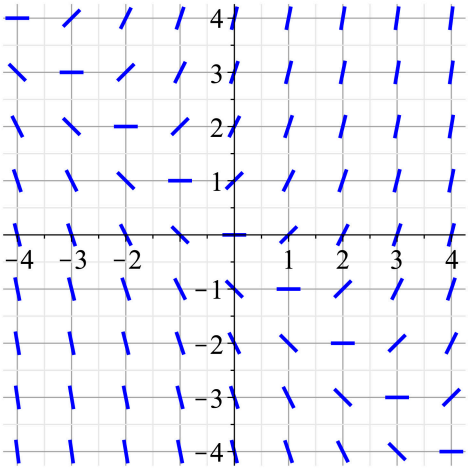
- Im Punkt P(0, 0) ist y′=0+0=0; die Tangente an die Lösungskurve im Punkt P verläuft also waagrecht.
- Im Punkt Q(2, –4) ist y′(2, –4)=2+(–4)=–2, und die Tangente an die Lösungskurve hat die Steigung –2.

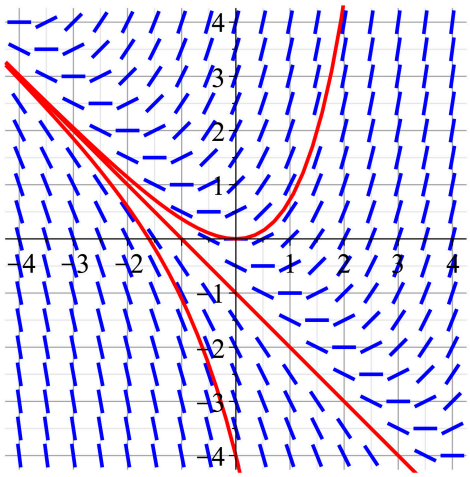
In der Tabelle wird y′ für einige Punkte berechnet, in der Graphik werden die Ergebnisse dargestellt. Diese Darstellung ist das *Richtungsfeld der Differentialgleichung y′=x+y*.

		x				
		–4	–2	0	2	4
y	4	0	2	4	6	8
	2	–2	0	2	4	6
	0	–4	–2	0	2	4
	–2	–6	–4	–2	0	2
	–4	–8	–6	–4	–2	0



Natürlich gewinnt das Richtungsfeld an Aussagekraft, wenn man den Rechenaufwand erhöht und y′ für mehr Punkte berechnet.





Man erkennt, dass durch jeden Punkt der xy-Ebene eine Lösungskurve verläuft. Oben eingezeichnet sind die 3 Lösungskurven durch die Punkte (0, 0), (0, –4) und (2, –3).
Von Hand kann man diese Kurven näherungsweise konstruieren, indem man beim vorgegebenen Punkt startet und von dort aus den weiteren Verlauf nach links und nach rechts mithilfe der blau eingezeichneten Tangentenabschnitte abschätzt.
Gelegentlich kann man sogar die Funktionsgleichung einer speziellen Lösung angeben. Bei diesem Beispiel ist das für die rot eingezeichnete Gerade möglich:

$$y(x) = -x - 1.$$

Tatsächlich handelt es sich um eine Lösung der Differentialgleichung [36.16]:

$$y'(x) = (-x-1)' = -1 \text{ und } x + y(x) = x + (-x-1) = -1.$$

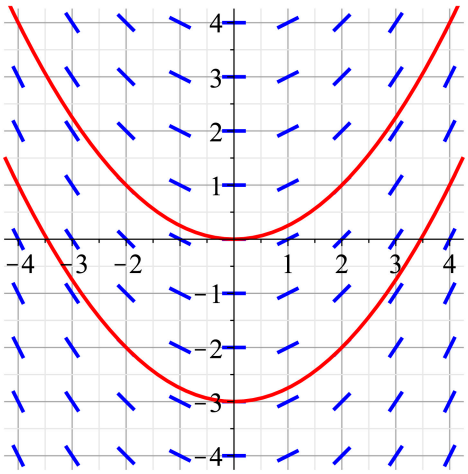
36.4.1 Beispiele

(1) a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{2}x$, kurz $y' = \frac{1}{2}x$.
b) Skizzieren Sie die Graphen der speziellen Lösungen durch P(0, 0), Q(0, –3) und R(–2, 1).
c) Geben Sie die allgemeine Lösung und die speziellen Lösungen an.

(2) Die Temperatur in einem Zimmer misst 20°C. In diesem Zimmer kühlt sich ein 60°C warmer Tee in der Tasse in 15 Minuten auf 40°C ab, ein vorher im Kühlschrank bei 4°C gelagerter Orangensaft wird wärmer. Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit der Temperaturveränderung zu jedem Zeitpunkt t proportional zur Differenz zwischen der Temperatur T(t) des Getränks und der Temperatur T_Z des Zimmers ist.
Für die Lösung von a) und b) müssen Sie keine Differentialgleichung herleiten.
a) Skizzieren Sie die Graphen der speziellen Lösungen durch P(0, 4) und Q(0, 60).
b) Fertigen Sie eine qualitativ richtige Skizze des Richtungsfelds an.

(1) a) Das Richtungsfeld ist rechts abgebildet. Weil y in der Differentialgleichung nicht auftritt, hängt die Tangentensteigung im Punkt (x, y) nur von x ab. Tangentenabschnitte durch Punkte mit gleichem x-Wert haben darum die gleiche Steigung und verlaufen parallel:

$$P(-3, y) \Rightarrow y' = -\tfrac{3}{2},$$
$$P(-2, y) \Rightarrow y' = -1,$$
$$P(0, y) \Rightarrow y' = 0 \text{ usw.}$$



b) Die speziellen Lösungen sind rot eingezeichnet. Für P(0, 0) und R(–2, 1) fallen sie zusammen; beide Punkte liegen auf demselben Graphen.

c) Die allgemeine Lösung gewinnt man durch Integration:

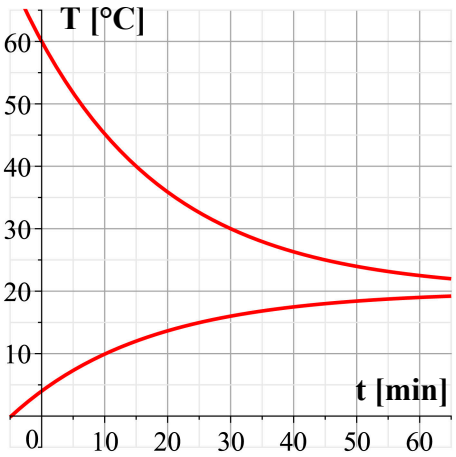
$$y(x) = \int \tfrac{1}{2}x\,dx = \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

Die speziellen Lösungen gewinnt man durch geeignete Wahl von C:

$$P: \quad y(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + C \Rightarrow 0 = \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 + C \Rightarrow C = 0,$$
$$Q: \quad y(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + C \Rightarrow -3 = \tfrac{1}{4}\cdot 0^2 + C \Rightarrow C = -3,$$
$$R: \quad y(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + C \Rightarrow 1 = \tfrac{1}{4}\cdot 2^2 + C \Rightarrow C = 0.$$

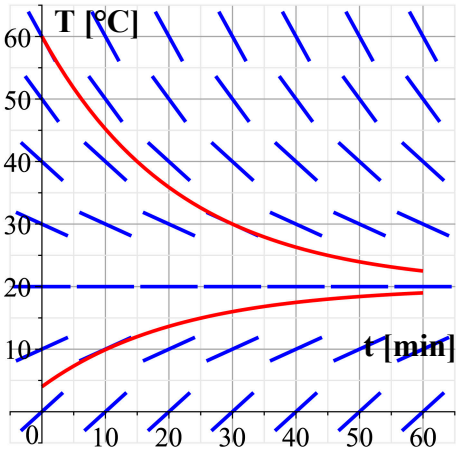
(2) a) Wegen der speziellen Zahlen kann man die beiden Graphen leicht einzeichnen:

© Pythagoras Lehrmittel



Zum Zeitpunkt t=0 min liegt die Teetemperatur um 40°C über der Zimmertemperatur T_Z=20°C, zum Zeitpunkt t=15 min noch um 20°C über T_Z , zum Zeitpunkt t=30 min noch um 10°C, zum Zeitpunkt t=45 noch um 5°C, zum Zeitpunkt t=60 min noch um 2.5°C. Somit ist die Temperatur T(t) des Tees im Viertelstundentakt: 60°C, 40°C, 30°C, 25°C, 22.5°C. Mit diesen fünf Angaben kann man den (oberen) Graphen für die Abkühlung des Tees genügend genau skizzieren.
Mit derselben Überlegung erhält man für die Temperatur T(t) des Orangensaftes im Viertelstundentakt 4°C, 12°C, 16°C, 18°C, 19°C und kann den (unteren) Graphen skizzieren.

b) Beim Einzeichnen des Richtungsfeldes helfen folgende Überlegungen:



- Ein 20°C warmes Getränk ändert seine Temperatur in einem 20°C warmen Zimmer nicht. Deshalb verlaufen alle Tangentenabschnitte für T=20°C waagrecht.
- Die Abkühlung des 60°C warmen Tees in der Tasse beginnt dann, wenn er aus der Thermoskanne ausgeschenkt wird. Es spielt keine Rolle, ob der Tee zum Zeitpunkt t=0 min, t=20 min oder t=37 min ausgeschenkt wird. Deshalb verlaufen alle Tangentenabschnitte bei gleicher Temperatur T parallel zueinander.

Insbesondere sind die Tangentenabschnitte bei einer bestimmten Temperatur jeweils parallel zu den beiden rot eingezeichneten Graphen.

♦

36.5 Ergänzung: Differentialgleichungen näherungsweise lösen

Nicht immer kann man als Lösung einer Differentialgleichung eine elementare Funktion f angeben. Aber oft kann mit wenig Aufwand wenigstens Näherungswerte für f(x) berechnen. Die Idee dazu basiert auf dem Richtungsfeld der zu lösenden Differentialgleichung.

36.5.1 Beispiel

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}y(x)}_{f(x,\,y(x))}$, kurz

$$y' = \underbrace{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{5}y}_{f(x,\,y)}, \qquad \textbf{[36.17]}$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(0)=1. \qquad \textbf{[36.18]}$$

Gesucht ist ein Näherungswert y* für den Funktionswert dieser speziellen Lösung an der Stelle x=2, also für y(2).

Die Bezeichnungen

$$f(x, y(x)) \text{ oder auch } f(x, y)$$

für die rechte Seite der Differentialgleichung [36.17] erweisen sich im Hinblick auf die später folgende Verallgemeinerung dieses Beispiels als praktisch. Die beiden Bezeichnungen bringen zum Ausdruck, dass im Term rechts vom Gleichheitszeichen x und y(x) auftreten können.

Mithilfe des Terms f(x, y) berechnen wir die Steigung des Tangentenabschnitts im Punkt P(x, y); f ist hier also nicht eine Lösung der Differentialgleichung!

- *Erste Schätzung:* Wir nähern den roten Graphen der Lösungsfunktion durch die grüne Strecke s an, welche gemäss [36.18] auf der Tangente im Punkt (0, 1) liegt. Die Tangente hat die Steigung

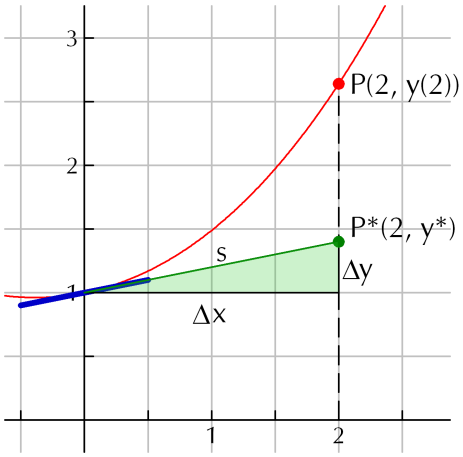
  $$m_1 = y' = f(0, 1) \overset{[36.17]}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{5}\cdot 1 = 0.2,$$

  was durch den blauen Tangentenabschnitt angedeutet ist. Für $\Delta x = 2$ wird

  $$\Delta y = m_1 \cdot \Delta x = 0.4,$$

  und der sehr ungenaue Schätzwert für y(2) ist

  $$y^* = 1 + \Delta y = 1.4.$$



- *Verbesserung der Schätzung:* Wir wählen neu $\Delta x = 1$ und folgen der Tangente im Punkt (0, 1) nur noch bis zum Punkt (1, …). Es folgt wie oben

  $$m_1 = 0.2,$$

  $$\Delta y_1 = m_1 \cdot \Delta x = 0.2,$$

  und die y-Koordinate des Punktes P(1, …) ist

  $$1 + \Delta y_1 = 1.2.$$

  In P(1, 1.2) bestimmen wir die Steigung neu:

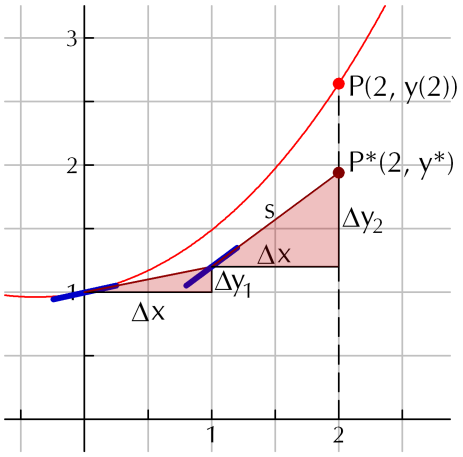
  $$m_2 = f(1, 1.2) \overset{[36.17]}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{5}\cdot 1.2 = 0.74$$

  und zeichnen den neuen Tangentenabschnitt ein. Nun geht es in dieser Richtung weiter:

  $$\Delta y_2 = m_2 \cdot \Delta x = 0.74,$$

  $$y^* = 1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 = 1.94.$$

  Der Graph der Lösungsfunktion wird neu durch den braunen Streckenzug angenähert.



- *Erneute Verbesserung der Schätzung:* Wir wählen $\Delta x = \frac{1}{2}$ und erhalten nach und nach:

  In (0, 1) ist

  $m_1 = f(0, 1) = 0.2$ gemäss [36.17],

  $\Delta y_1 = m_1 \cdot \Delta x = 0.1,$

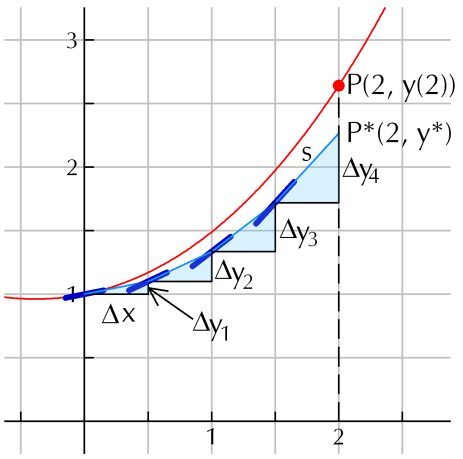
  der nächste Punkt (0.5, 1+0.1);

  in (0.5, 1.1) ist

  $$m_2 = f(0.5, 1.1) \overset{[36.17]}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 0.5 + \tfrac{1}{5}\cdot 1.1 = 0.47,$$

  $\Delta y_2 = m_2 \cdot \Delta x = 0.235,$

  der nächste Punkt (1, 1.1+0.235);



© Pythagoras Lehrmittel

in (1, 1.335) ist

$$m_3 = f(1, 1.335) \overset{[36.17]}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{5}\cdot 1.335 = 0.767,$$

$\Delta y_3 = m_3 \cdot \Delta x = 0.3835$, der nächste Punkt (1.5, 1.335+0.3835);

in (1.5, 1.7185) ist

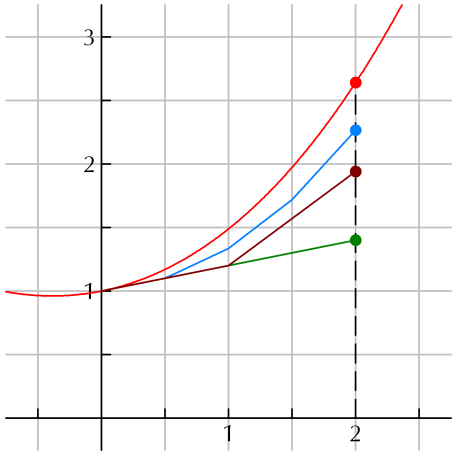
$$m_4 = f(1.5, 1.7185) \overset{[36.17]}{=} 1.0937, \Delta y_4 = m_4 \cdot \Delta x = 0.54685,$$

und der gesuchte Schätzwert ist $y^* = 1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 = 2.26535$.

Der rote Graph wird jetzt durch den blauen Streckenzug noch besser angenähert.

- Mit immer kleinerem Δx wird der rote Graph immer besser durch einen Streckenzug angenähert. Dafür nimmt der Rechenaufwand zu. Darum ist dieses Verfahren vor allem dann geeignet, wenn ein CAS zur Verfügung steht. Damit erhält man

Δx	y^*
0.1	2.560290
0.01	2.631590
0.001	2.638828
0.0001	2.639553
0.00001	2.639625



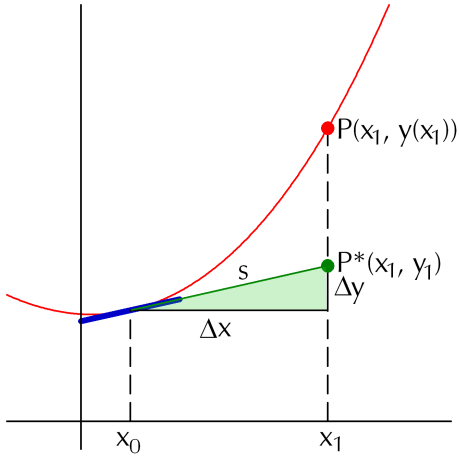
♦

Wir verallgemeinern nun dieses Vorgehen. Dazu betrachten wir, wie wir bei Beispiel 36.5.1 zur ersten Schätzung gelangt sind:

$$m_1 = y' = f(0, 1) \overset{[36.17]}{=} \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{5}\cdot 1 = 0.2,$$

$$\Delta y = m_1 \cdot \Delta x = 0.4,$$

$$y^* = 1 + \Delta y = 1.4.$$



Durch Verallgemeinerung folgt:

$$m_1 = y' = f(x_0, y_0),$$

$$\Delta y = m_1 \cdot \Delta x,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y,$$

kurz: $$y_1 = y_0 + \Delta x \cdot f(x_0, y_0).$$

Und genauso fahren wir fort:

$$y_2 = y_1 + \Delta x \cdot f(x_1, y_1),$$

$$y_3 = y_2 + \Delta x \cdot f(x_2, y_2),$$

$$\ldots$$

Damit haben wir hergeleitet:

36.5.2 Verfahren von Euler[1] (auch Euler-Cauchy[2]-Verfahren)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \text{ kurz } y' = f(x, y),$$
$$y(x_0) = y_0; \qquad \textbf{[36.19]}$$

[1] Euler Leonhard, Schweizer Mathematiker und Physiker, 15.4.1707 (Basel) bis 7./18. September 1783 (St. Petersburg)

[2] Cauchy Augustin-Louis, französischer Mathematiker, 21. August 1789 (Paris) bis 23. Mai 1857 (Sceaux bei Paris)

gesucht sind an den vorgegebenen Stellen

$$x_1 = x_0 + \Delta x,\ \ x_2 = x_1 + \Delta x,\ \ \ldots,\ \ x_n = x_{n-1} + \Delta x,$$

Schätzungen

$$y_1 \approx f(x_1),\ \ y_2 \approx f(x_2),\ \ \ldots,\ \ y_n = y^* \approx f(x_n),$$

für die Funktionswerte der speziellen Lösung y(x) der Differentialgleichung [36.19]. Es gilt

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i),\ \ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Es gibt raffiniertere Methoden als das Verfahren von Euler, um Differentialgleichungen näherungsweise zu lösen. Dazu sei auf die Aufgaben für Freaks und auf Fachliteratur verwiesen.

36.6 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

A. Ein Richtungsfeld zeichnen

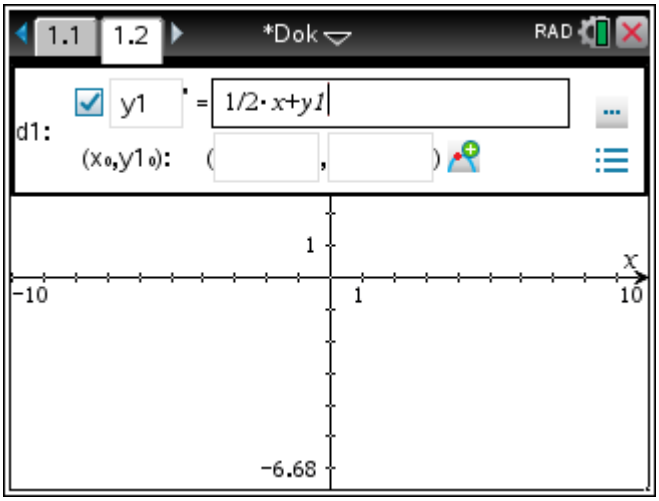
36.6.1 Beispiele

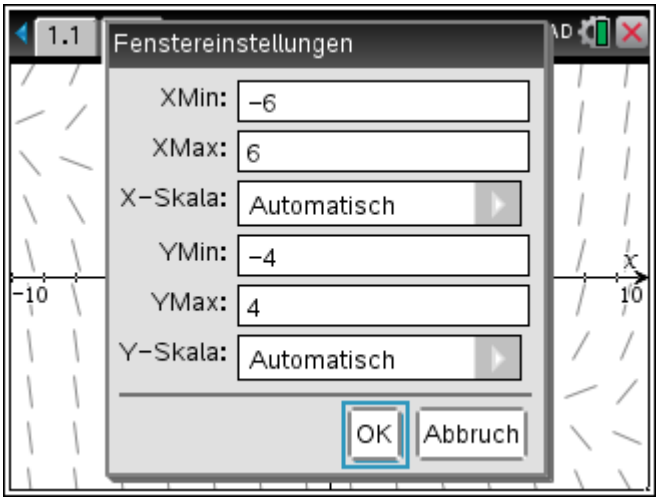
(1) Eröffnen Sie ein Grafikblatt und stellen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{1}{2}x + y(x)$ – kurz: $y' = \frac{1}{2}x + y$ – für $x \in [-6, 6]$ und $y \in [-4, 4]$ dar.

(2) Tragen Sie die (Näherungs-)Lösung durch P(0, 0) ins Richtungsfeld ein.

(3) Tragen Sie auch noch die (Näherungs-)Lösungen durch Q(3, –2) und R(0, –3) ein.

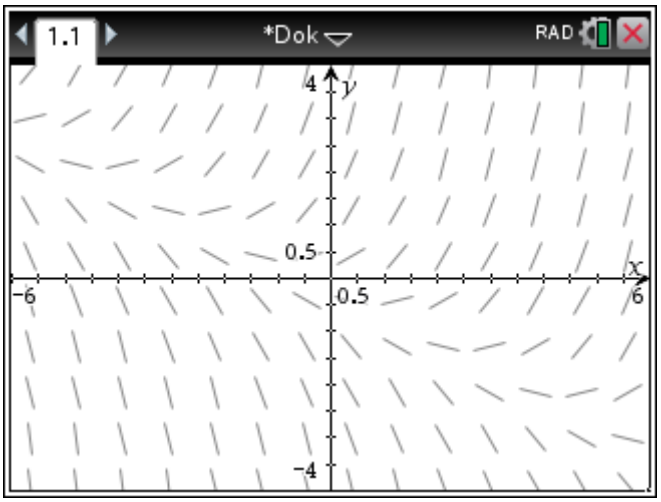
(1) Ein neues Grafikblatt eröffnen und für ein Richtungsfeld einrichten:
Ctrl I 2 menu 3 8
Hinweis: Bei der Windows- und Mac-Version von Nspire CX CAS muss jeweils nicht menu gedrückt, sondern das Symbol ⚒ angeklickt werden.
Das CAS erwartet, dass die gesuchte Funktion y1 und nicht y heisst. Also ersetzt man in der vorgegebenen Differentialgleichung y durch y1:
$y1' = \frac{1}{2}x + y1$
und tippt in die Eingabezeile ein:
½*x+y1 Enter
Das Richtungsfeld gezeichnet.
Bei Bedarf ändert man den dargestellten Ausschnitt, indem man bei
menu 4 1
(bei der Windows- und Mac-Version des CAS: ⚒ 4 1) die gewünschten Anpassungen vornimmt:
–6 ▼ 6 ▼ ▼ –4 ▼ 4 Enter





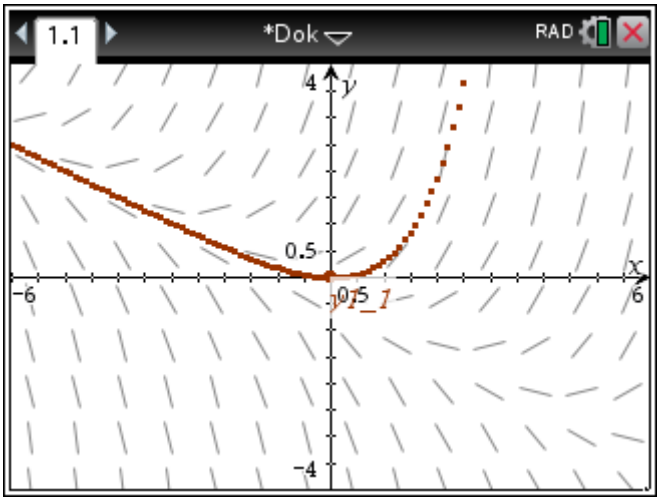
© Pythagoras Lehrmittel

Das Richtungsfeld wird neu gezeichnet.



(2) Ctrl G ▲ ▼ 0 ▶ 0 Enter

Der Graph der speziellen Lösung und der Punkt P(0, 0) werden ins Richtungsfeld eingezeichnet.



(3) Ctrl G ▲

Den Graphikzeiger mit dem Touchpad (oder der Maus) auf das Symbol führen, dieses anklicken und die neuen Punkte ergänzen:

tab tab

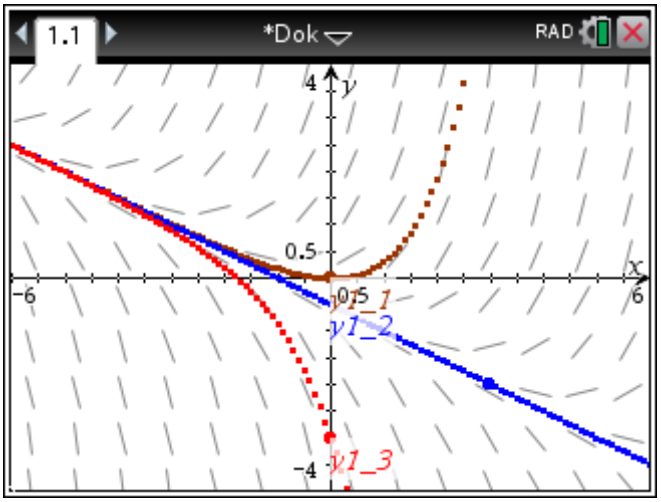
3 tab −2 tab

0 tab −3 Enter

Ctrl G

Die Graphen sowie die Punkte Q und R werden eingezeichnet.

♦



B. Ergänzung: Eine Differentialgleichung näherungsweise lösen

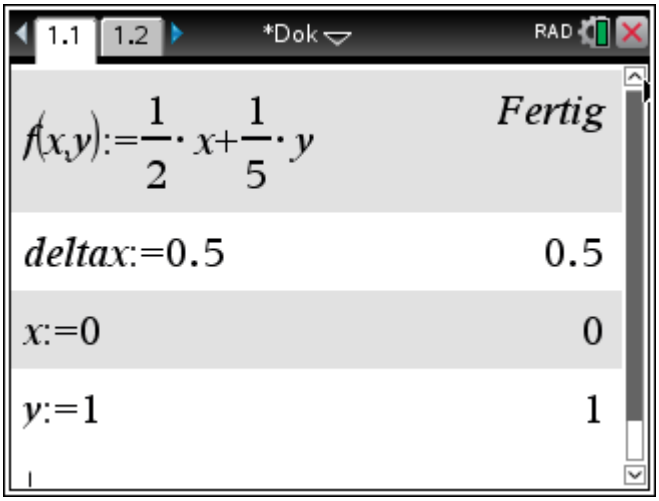
Mit einem kleinen Programm kann man die folgende Aufgabe viel eleganter lösen. Weil dieses Buch aber kein Lehrgang in Programmierung ist, wird nur eine höchst einfache Methode vorgestellt.

36.6.2 Beispiel

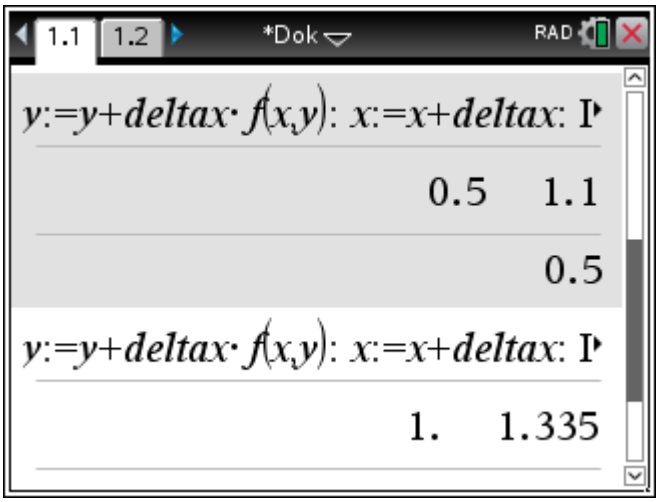
Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y$ mit der Anfangsbedingung $y(0)=1$.

Gesucht sind nach dem Verfahren von Euler berechnete Schätzwerte y* für die Funktionswerte dieser speziellen Lösung an den Stellen x=0.5, x=1, x=1.5 und x=2.

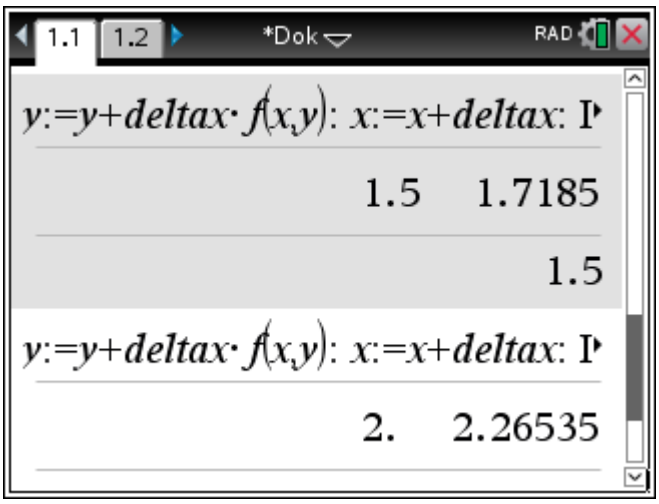
Differentialgleichung und Schrittweite Δx festlegen:
f(x, y):=1/2*x+1/5*y Enter
deltax:=0.5 Enter
Anfangsbedingung festlegen:
x:=0 Enter
y:=1 Enter



Den nächsten Punkt berechnen und anzeigen:
y:=y+deltax*f(x, y) : x:=x+deltax : disp x, “ “, y Enter
Ergebnis: (0.5, 1.1)
Der x-Wert wird darunter noch einmal angezeigt, kann aber ignoriert werden.
Den nächsten Punkt berechnen und anzeigen:
▲ ▲ ▲ Enter Enter
Ergebnis: (1, 1.335)



Den nächsten Punkt berechnen und anzeigen:
▲ ▲ ▲ Enter Enter
Ergebnis: (1.5, 1.7185)
Den nächsten Punkt berechnen und anzeigen:
▲ ▲ ▲ Enter Enter
Ergebnis: (2, 2.26535)



♦

36.7 Übungen

A. Fragen zum Grundstoff

1. Was ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung? Geben Sie 2 Beispiele an.
2. Was ist eine Anfangsbedingung, was die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung?
3. Was ist das Richtungsfeld einer Differentialgleichung? Wozu ist es gut?

© Pythagoras Lehrmittel

4. Schreiben Sie als Formel:
   a) Im Intervall $[x, x+\Delta x]$ gilt: Der Zuwachs Δy ist proportional zu Δx.
   b) Im Intervall $[t, t+\Delta t]$ gilt: Der Zuwachs ΔN ist proportional zu $N(t)$ und Δt.

B. Fragen zum Ergänzungsstoff

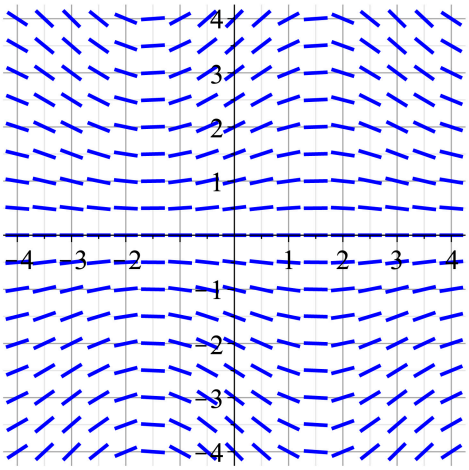
1. Wie bestimmt man eine spezielle Lösung einer Differentialgleichung näherungsweise nach dem Verfahren von Euler?

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Zeigen Sie: Die angegebenen Funktionen lösen die jeweilige Differentialgleichung.

   a) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x,\ \ y: x \mapsto x^2$
   b) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x,\ \ y: x \mapsto x^2 + Cx$
   c) $f'(x) = \frac{f(x)}{x+1},\ \ f_1: x \mapsto 0,\ \ f_2: x \mapsto x+1$
   d) $f'(x) = \frac{f(x)}{x+1},\ f: x \mapsto C(x+1)$
   e) $f'(x) = 2 - \frac{y(x)}{x},\ \ f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$
   f) $f'(x) = 2 - \frac{y(x)}{x},\ \ f: x \mapsto x + \frac{C}{x}$
   g) $f'(x) = n \cdot \frac{y(x)}{x},\ \ f: x \mapsto C \cdot x^n$
   h) $f'(x) = 4 \cdot \frac{y(x)}{x} + 1,\ \ f: x \mapsto C \cdot x^4 - \frac{1}{3}x$
   i) $y'(x) = a\frac{y(x)}{x} + bx,\ \ y: x \mapsto Cx^a - \frac{b}{a-2}x^2\ \ (a \neq 2)$
   j) $y'(x) = y(x) + 1,\ \ y: x \mapsto e^x - 1$
   k) $y'(x) = y(x) + a,\ \ y: x \mapsto C \cdot e^x - a$
   l) $y'(x) = x + y(x),\ \ y: x \mapsto C \cdot e^x - x - 1$
   m) $y''(t) = -y(t),\ \ y_1: t \mapsto \sin t,\ \ y_2: t \mapsto \cos t$
   n) $y'''(x) + y'(x) = 0,\ \ y: x \mapsto C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3$
   o) $y''(t) = \frac{2y(t)}{t^2},\ \ y_1: t \mapsto t^2,\ \ y_2: t \mapsto \frac{1}{t}$
   p) $y''(t) = \frac{2y(t)}{t^2},\ \ y: t \mapsto C_1 t^2 + C_2 t^{-1}$

2. Nebenan ist das Richtungsfeld einer Differentialgleichung dargestellt.
   a) Skizzieren Sie die speziellen Lösungen durch die Punkte A(–1, 0), B(0, –3) und C(2, 2).
   b) Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist
   $$f: x \mapsto C \cdot e^{\frac{1}{4}\cdot \sin x}.$$
   Welches sind die speziellen Lösungen durch die Punkte A, B und C?
   c) Bestimmen Sie d so, dass der Punkt D(0, d) auf dem Graphen der durch C verlaufenden speziellen Lösung liegt.



3. Zeichnen Sie die Richtungsfelder von Hand ins Koordinatensystem ein und skizzieren Sie die speziellen Lösungen durch die angegebenen Punkte. Leere Koordinatensysteme für das Zeichnen von Richtungsfeldern finden Sie am Schluss dieses Kapitels.

   a) $y'(x) = y(x)$, (0, 0), (0, 1), (–4, –1)
   b) $y'(x) = x - y(x)$, (0, 0), (0, –3), (2, –3)
   c) $y'(x) = x \cdot y(x)$, (–4, 0), (0, 1), (2, –2)
   d) $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$, (–2, 2), (0, 1), (2, –3)
   e) $y'(x) = y(x) - x^2$, (0, 1), (0, 2), (2, –3)

4. [CAS] Lösen Sie Aufgabe 3. mit Ihrem CAS-Rechner.
5. Zeichnen Sie die Richtungsfelder und die speziellen Lösungen durch die angegebenen Punkte in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie anschliessend die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an, und beweisen Sie, dass diese Lösung tatsächlich die Differentialgleichung erfüllt. Leere Koordinatensysteme für das Zeichnen von Richtungsfeldern finden Sie am Schluss dieses Kapitels.

   a) $y'(x) = x$, (0, 1), (1, 0), (2, –2)

   b) $y'(x) = \frac{1}{x}$, (–2, 2), (1, 0)

   c) $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$, (–2, 2), (1, 0), (4, 2)

   d) $y'(x) = \frac{1}{y(x)}$, (–4, 0), (0, 1), (2, –2)

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. Zeigen Sie: Die angegebenen Funktionen lösen die jeweilige Differentialgleichung.

   a) $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$, $y_{1,2} : x \mapsto \pm\sqrt{x^2 + C}$

   b) $f''(x) = -2f'(x)$, $f : x \mapsto C_1 \cdot e^{-2x} + C_2$

   c) $y''(x) = y(x) - x$, $y : x \mapsto x + C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$

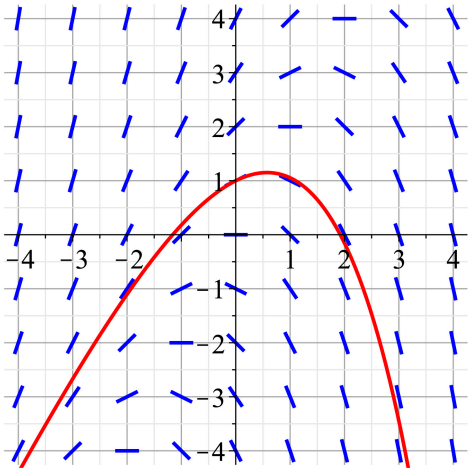
   d) $y''(x) + 9y(x) = 0$, $y : x \mapsto C_1 \cdot \sin(3x) + C_2 \cdot \cos(3x)$

   e) $y''(x) + 9y(x) = 0$, $y : x \mapsto C_1 \cdot \sin(3x + C_2)$

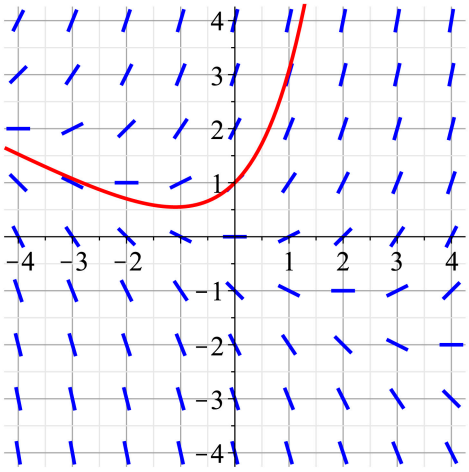
   f) $y'(x) = 2\frac{y(x)}{x} + bx$, $y : x \mapsto x^2 \cdot (C + b \cdot \ln x)$

2. Ordnen Sie den vier Richtungsfeldern die richtige Differentialgleichung zu.

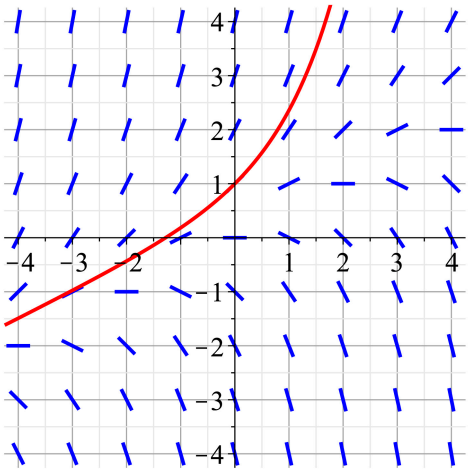
(1)



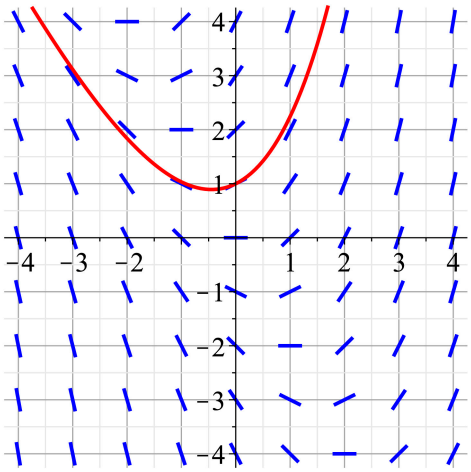
(2)



(3)



(4)



© Pythagoras Lehrmittel

(A) $y'(x) = \frac{1}{2}y(x) + x$ (B) $y'(x) = y(x) + \frac{1}{2}x$ (C) $y'(x) = y(x) + x$

(D) $y'(x) = \frac{1}{2}y(x) - x$ (E) $y'(x) = y(x) - \frac{1}{2}x$ (F) $y'(x) = y(x) - x$

3. a) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'(x) = \frac{-x}{y(x)}$ und die speziellen Lösungen durch die Punkte (2, 1.5), (0, 1) und (0, –4) in ein Koordinatensystem ein.
   b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an, und beweisen Sie, dass diese Lösung tatsächlich die Differentialgleichung erfüllt.
   c) Welches sind die Funktionsgleichungen der drei speziellen Lösungen?
4. Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1 : t \mapsto C \cdot t + C^2$ und $f_2 : t \mapsto -\frac{1}{4}t^2$ lösen die Differentialgleichung $f(t) = t \cdot f'(t) + f'(t)^2$.

   Bemerkenswert an f_2 ist, dass es sich nicht um einen Spezialfall von f_1 handelt. f_2 ist eine *singuläre Lösung* der Differentialgleichung.
5. Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1 : x \mapsto Cx - \ln C$ und $f_2 : x \mapsto 1 + \ln x$ lösen die Differentialgleichung $f(x) = x \cdot f'(x) - \ln\left(f'(x)\right)$. Auch hier ist f_2 kein Spezialfall von f_1, sondern eine *singuläre Lösung*.
6. a) Welche Lösung der Differentialgleichung $f'(x) = -f(x)^2$ erkennt man leicht?
   b) Zeigen Sie: Die Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{x - C}$ sind Lösungen der Differentialgleichung $f'(x) = -f(x)^2$.
   c) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung an, die nicht zu den bei b) erwähnten Funktionen gehört.
   d) Lösen Sie die Differentialgleichung $f'(x) = -f(x)^2$ mit $f(0) = 3$.
7. a) Zeigen Sie: Die Funktionen $y(x) = \frac{1}{x^2 + C}$ sind Lösungen der Differentialgleichung $y'(x) = -2x \cdot y(x)^2$.
   b) [CAS] Zeichnen Sie das Richtungsfeld,und zeichnen Sie die speziellen Lösungen durch (0, 2) und (0, –1) ein.
   c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der speziellen Lösungen von b).
   d) [CAS] Welche Graphen hat Ihr CAS bei b) richtig eingezeichnet, welche falsch? Womit könnte der Fehler zusammenhängen?
   e) Finden Sie mithilfe des Richtungsfelds eine singuläre Lösung (→ D.4.).
8. Beim radioaktiven Zerfall von Atomen nehmen wir an, dass die Anzahl der in einem kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ zerfallenden Atome proportional zu Δt und zur Anzahl $N(t)$ der gerade vorhandenen Atome ist.
   a) Geben Sie die Differentialgleichung für $N(t)$ an.
   b) Welches ist ihre allgemeine Lösung?
   c) Zur Zeit $t=0$ sind N_0 Atome vorhanden. Welches ist die spezielle Lösung der bei a) gefundenen Differentialgleichung?
9. In einem Land leben zum Zeitpunkt t genau $B(t)$ Menschen. In einem kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ soll gelten:
   1. Die Anzahl der Geburten ist proportional zu Δt und $B(t)$.
   2. Die Anzahl der Todesfälle ist proportional zu Δt und $B(t)$.
   3. Die Anzahl der Zuwanderer ist proportional zu Δt und hängt nicht von $B(t)$ ab.

4. Die Anzahl der Auswanderer ist proportional zu Δt und hängt nicht von B(t) ab. Geben Sie die Differentialgleichung für die Funktion B an. Sie brauchen sie nicht zu lösen.

10. Erweitern Sie Beispiel 36.2.3 durch Berücksichtigung des Luftwiderstands. Stellen Sie die Differentialgleichung für s(t) unter der Annahme auf, dass der Luftwiderstand, welcher auf einen fallenden Körper der Masse m wirkt, …
    a) … proportional zur momentanen Fallgeschwindigkeit ist,
    b) … proportional zum Quadrat der momentanen Fallgeschwindigkeit ist.
    Sie brauchen die Differentialgleichungen nicht zu lösen.
11. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, welche die Abkühlung des Tees von Beispiel 36.4.1(2) beschreibt. Sie brauchen die Differentialgleichung nicht zu lösen.
12. Meerwasser enthält etwa 3.5% Salz. Ein Meerwasseraquarium wurde versehentlich mit 2700 Litern Süsswasser (0% Salz) gefüllt. Der Fehler wird korrigiert, indem man während einer gewissen Zeit t pro Minute 18 Liter Meerwasser einleitet, dieses sofort mit dem Aquariumwasser mischt und gleichzeitig 18 Liter Aquariumwasser durch den Überlauf entfernt. Geben Sie die Differentialgleichung für die im Aquariumwasser zum Zeitpunkt t enthaltene Salzmenge S(t) an.
13. Einem Patienten wird mit einer Infusion Traubenzucker (Glukose) zugeführt. g(t) sei die zur Zeit t vorhandene Menge Traubenzucker im Blut. Der Patient erhält pro Minute a Gramm Glukose, während die Abbaugeschwindigkeit proportional zur vorhandenen Glukosemenge ist. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Funktion g auf.
14. Eine Klatschtante verbreitet in einem Dort mit 1000 Einwohnern ein Gerücht. Die Anzahl der Personen, die zum Zeitpunkt t das Gerücht kennen, sei P(t), und P(0)=1. Überlegen Sie sich selber plausible Modellannahmen, und stellen Sie eine Differentialgleichung für die Funktion P auf.
15. Bei [36.5] haben wir gezeigt, dass alle Funktionen der Bauart $N: t \mapsto C \cdot e^{a \cdot t}$ Lösungen der Differentialgleichung $N'(t) = a \cdot N(t)$ sind. Wir haben aber nicht gezeigt, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Das wird nun nachgeholt. Es sei N eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $N'(t) = a \cdot N(t)$, eine, die wir gefunden haben, oder eine, die wir übersehen haben.
    Zeigen Sie $\left(N(t) \cdot e^{-a \cdot t}\right)' = 0$, und folgern Sie daraus, dass zwingend $N(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$ ist.

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. Vorgelegt ist die Anfangswertaufgabe $y'(x) = y(x)$ mit y(0)=1.
   a) Schätzen Sie y(1) nach der Methode von Euler ab (Δx=1, Δx=0.5 und Δx=0.25).
   b) Welches ist die spezielle Lösung der Differentialgleichung? Welches ist der exakte Wert von y(1)?
   c) Wie gross ist der Unterschied zwischen den bei a) berechneten Näherungswerten und dem exakten Wert? Welchen Einfluss hat Δx?
2. Vorgelegt ist die Anfangswertaufgabe $y'(x) = y(x) + x$ mit y(0)=1.
   a) Schätzen Sie y(1) nach der Methode von Euler ab (Δx=1, Δx=0.5 und Δx=0.25).
   b) Zeigen Sie: Die spezielle Lösung der Differentialgleichung ist $y: x \mapsto 2 \cdot e^x - x - 1$.
   c) Wie gross ist der Unterschied zwischen den bei a) berechneten Näherungswerten und dem exakten Wert? Welchen Einfluss hat Δx?

© Pythagoras Lehrmittel

F. Aufgaben für Freaks

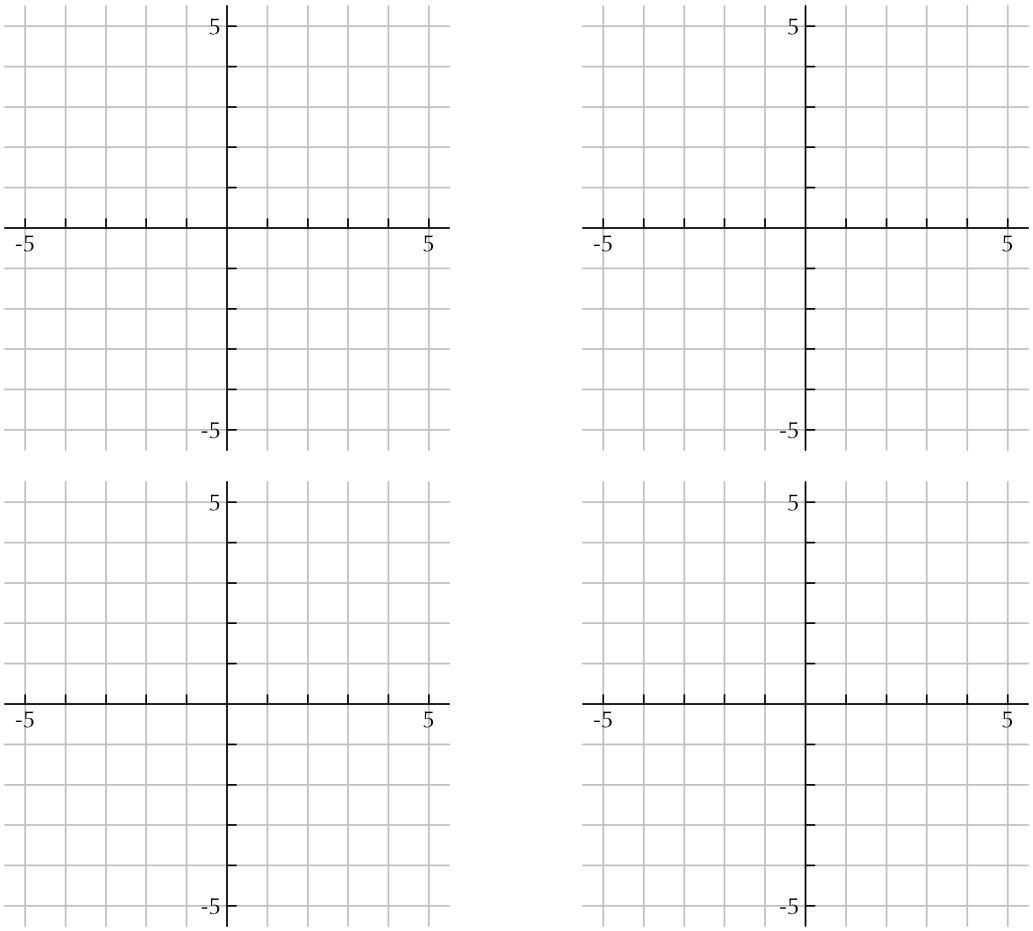
1. Schreiben Sie ein Programm, um Differentialgleichungen nach der Methode von Euler näherungsweise zu lösen. Damit können Sie mit wesentlich kleineren Δx wesentlich exaktere Näherungswerte berechnen als bei den Aufgaben E.1. und E.2.
2. Finden und studieren Sie weitere Methoden zur näherungsweisen Lösung einer Differentialgleichung. Schreiben Sie dazu ein Programm, falls Sie über entsprechende Kenntnisse verfügen.

Zum Schmunzeln …

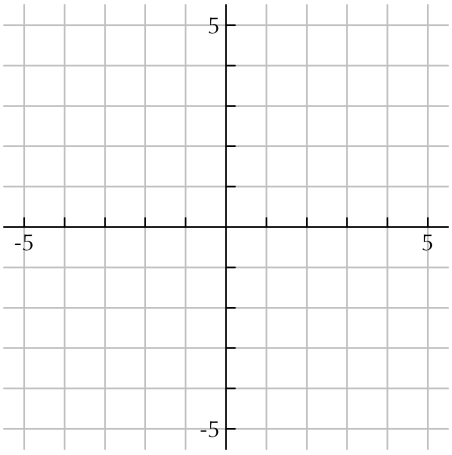
Im Sommer 2016 sorgte folgende Episode in der Presse für allgemeine Erheiterung:

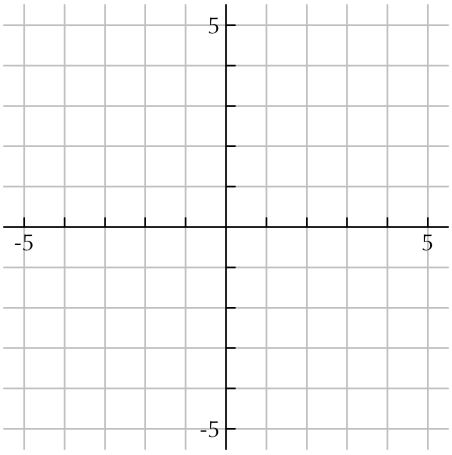
Eine Frau behauptete kurz vor dem Abheben ihres Flugzeugs, sie fühle sich nicht gut, worauf die Maschine ans Terminal zurückkehrte und die Frau aussteigen konnte. Umgehend teilte sie den Sicherheitsbehörden den wahren Grund ihrer Rückkehr mit: Ihr Sitznachbar hatte seltsame kryptische Zeichen auf ein Blatt Papier gekritzelt, welche die Frau als Geheimcode von Terroristen gedeutet hatte. Beim anschliessenden Verhör ihres Sitznachbarn stellte sich heraus, dass es sich um Guido Menzio[3], Professor für Ökonomie an der Universität Pennsylvania, handelte, der sich mit einer Differentialgleichung befasst hatte … Mit rund einer Stunde Verspätung hob das Flugzeug dann doch noch ab.

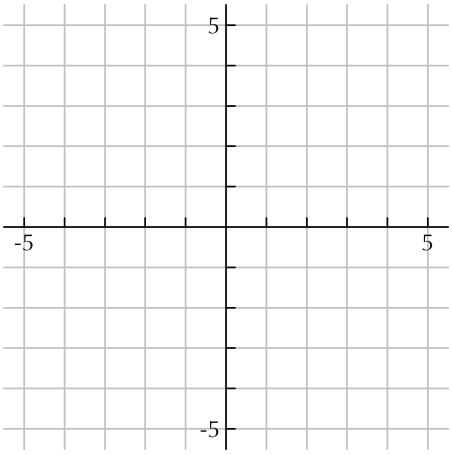
Leere Koordinatensysteme für das Einzeichnen von Richtungsfeldern

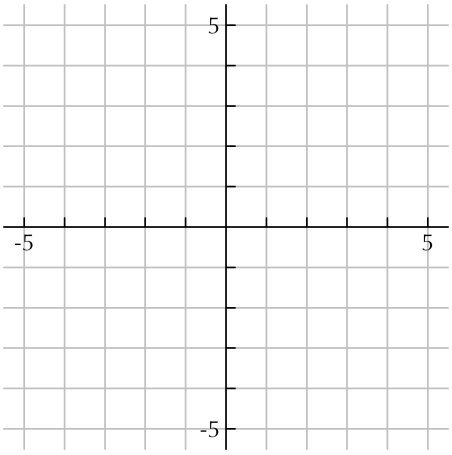


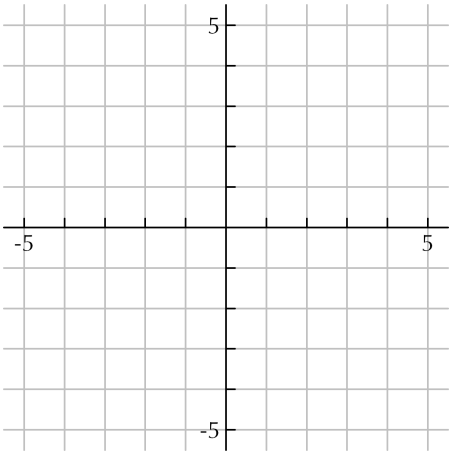
[3] Menzio Guido, italienischer Ökonom, *22.11.1975 (Turin)

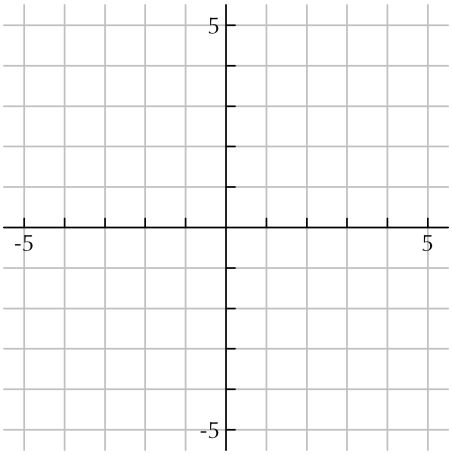


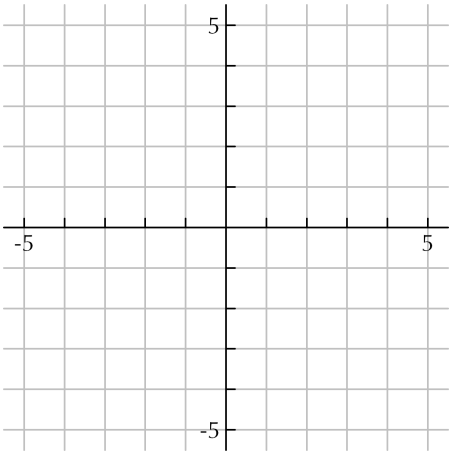


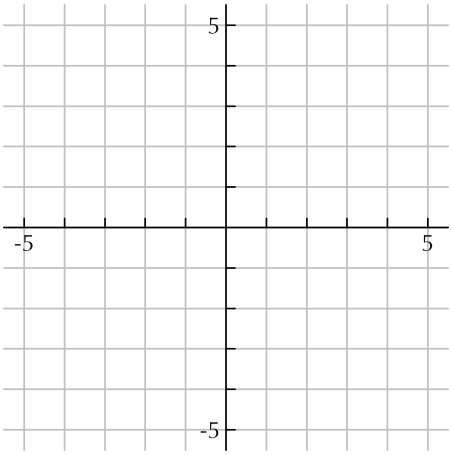




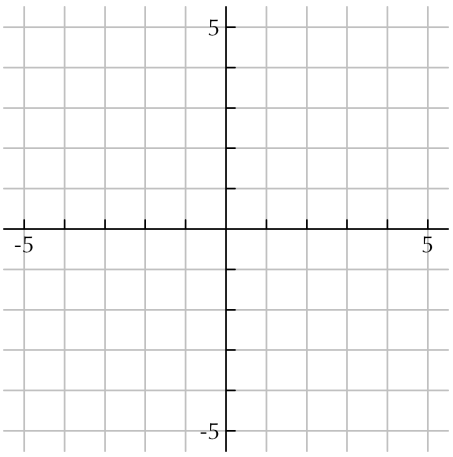


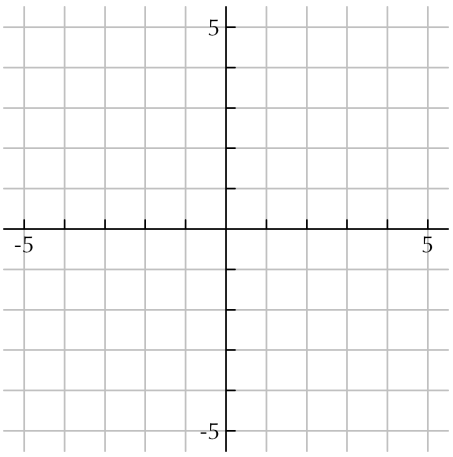


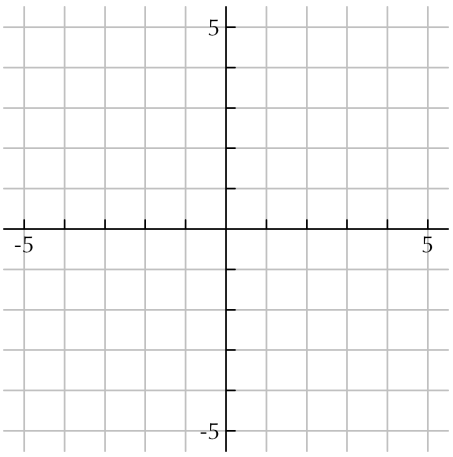


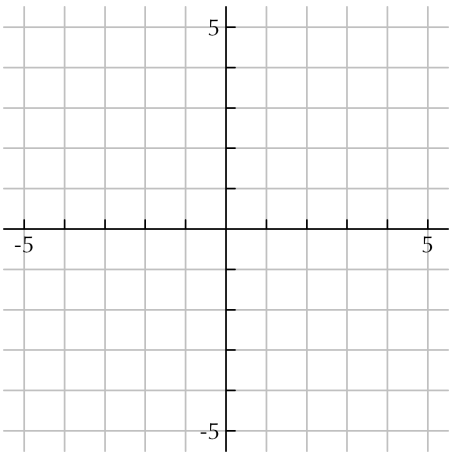


© Pythagoras Lehrmittel


5
-5
5
-5


5
-5
5
-5


5
-5
5
-5


5
-5
5
-5