36. Ergänzung: Was ist eine Differentialgleichung?

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Leiten Sie die angegebene Lösungsfunktion ab, und setzen Sie Funktion und Ableitung(en) in die Differentialgleichung ein. Zur Kontrolle sind als Zwischenresultate die auftretenden Ableitungen der Lösungsfunktion angegeben.

   a) $y'(x) = 2x$

   b) $y'(x) = 2x + C$

   c) $f_1'(x) = 0,\ f_2'(x) = 1$

   d) $f_1'(x) = 0,\ f_2'(x) = C$

   e) $f'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

   f) $f'(x) = 1 - C \cdot x^{-2} = 1 - \frac{C}{x^2}$

   g) $f'(x) = C \cdot nx^{n-1}$

   h) $f'(x) = C \cdot 4x^3 - \frac{1}{3}$

   i) $y'(x) = C \cdot ax^{a-1} - \frac{2b}{a-2}x$

   j) $y'(x) = e^x$

   k) $y'(x) = C \cdot e^x$

   l) $y'(x) = C \cdot e^x - 1$

   m) $y_1''(t) = -\sin t,\ y_2''(t) = -\cos t$

   n) $y'(t) = -C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x,\ y'''(t) = C_1 \cdot \sin x - C_2 \cdot \cos x$

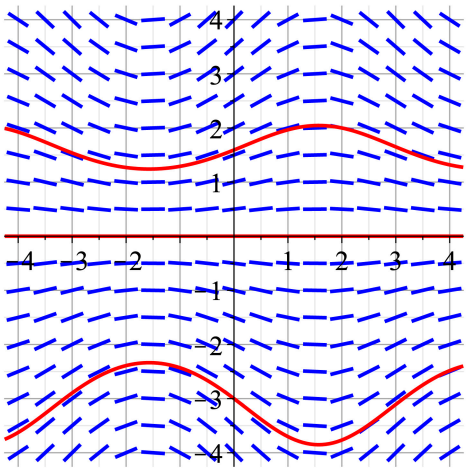
   o) $y_1''(t) = 2,\ y_2''(t) = 2 \cdot t^{-3} = \frac{2}{t^3}$

   p) $y''(t) = 2C_1 + 2C_2 \cdot t^{-3} = 2C_1 + \frac{2C_2}{t^3}$

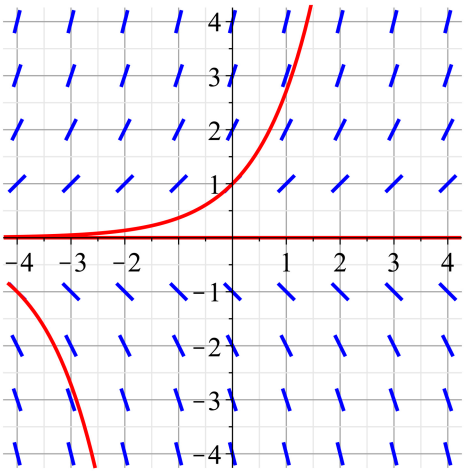
2. a) Nebenan ist die von einem CAS berechnete Lösung dargestellt.

   b) (–1, 0): rote Gerade (x-Achse)
   (0, –3): untere Kurve
   (2, 2): obere Kurve

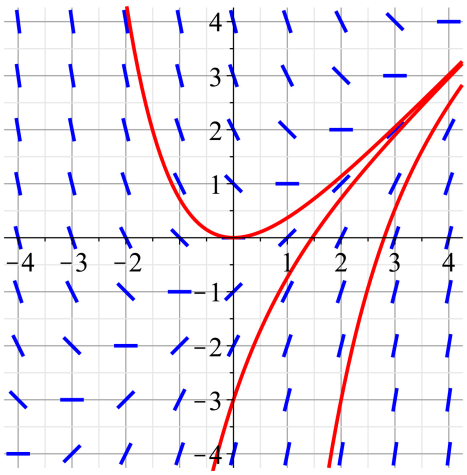
   c) $d = 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}\sin(2)} \approx 1.593$



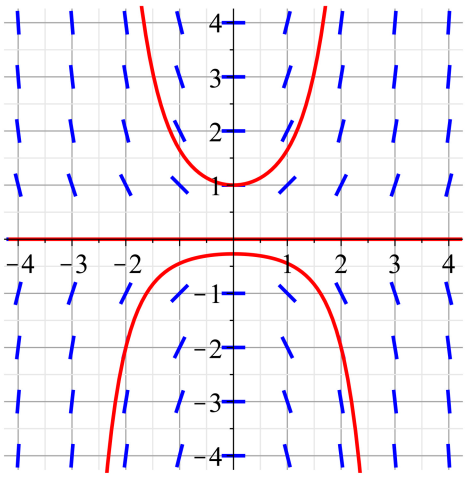
3. a)



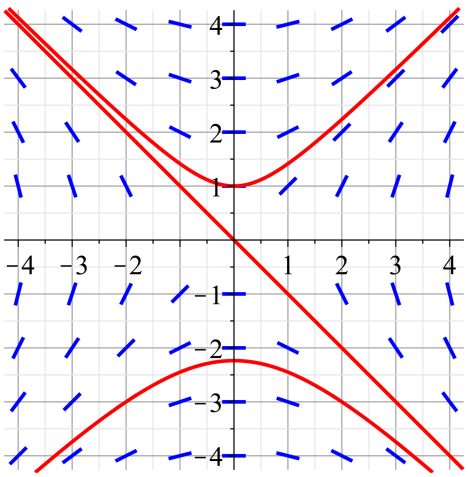
b)



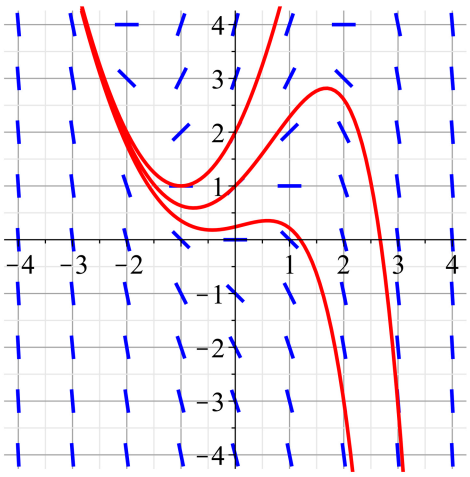
c)



d)

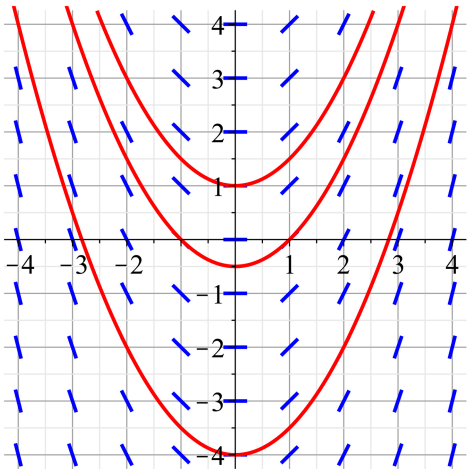


e)



4. Die Bilder auf Ihrem CAS-Rechner müssen ähnlich aussehen wie die Lösungen bei Aufgabe C.3.

5. a)

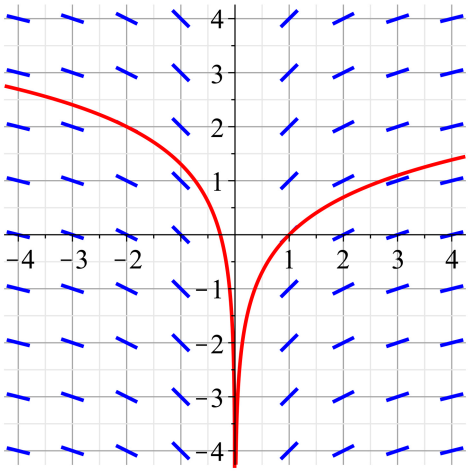


Allgemeine Lösung:

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

$y'(x) = x$

b)



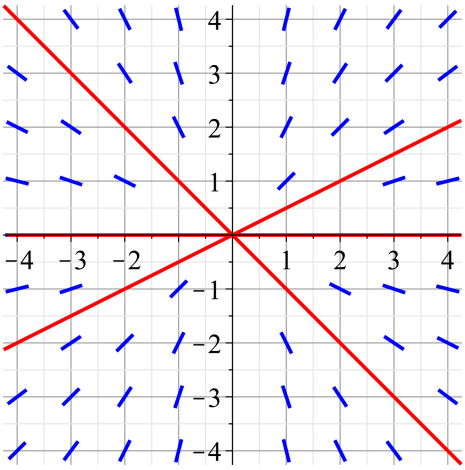
Allgemeine Lösung:

$y(x) = \ln(C \cdot x)$

$y'(x) = \frac{1}{x}$

© Pythagoras Lehrmittel

c)

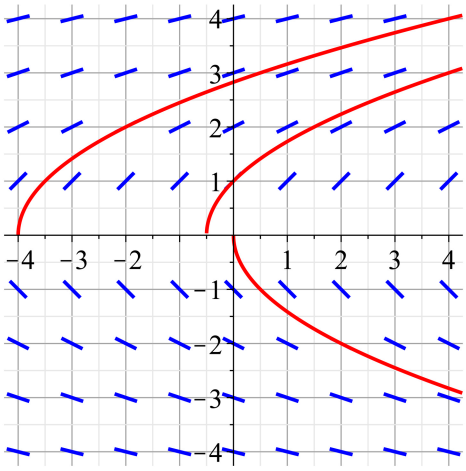


Allgemeine Lösung:

$y(x) = C \cdot x$

$y'(x) = C$

d)



Allgemeine Lösung:

$y(x) = \pm\sqrt{2x + C}$

$y'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2x + C}}$

Spiegelt man die eingezeichneten Graphen an der x-Achse, erfüllen die Kurven zwar die Differentialgleichung, stellen aber keine Funktion mehr dar.

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. Leiten Sie die angegebene Lösungsfunktion ab, und setzen Sie Funktion und Ableitung(en) in die Differentialgleichung ein. Zur Kontrolle sind als Zwischenresultate die auftretenden Ableitungen der Lösungsfunktion angegeben.

   a) $y_{1,2}'(x) = \pm\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$

   b) $f_1'(x) = -2C_1 \cdot e^{-2x}$, $f_1''(x) = 4C_1 \cdot e^{-2x}$

   c) $y_1''(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-x}$

   d) $y''(x) = -9 \cdot C_1 \cdot \sin(3x) - 9 \cdot C_2 \cdot \sin(3x)$

   e) $y''(x) = -9 \cdot C_1 \cdot \sin(3x + C_2)$

   f) $y'(x) = x \cdot (2b \cdot \ln x + b + 2C)$

2. Wählen Sie diverse Punkte P(x, y), berechnen Sie y', und überprüfen Sie, ob der eingezeichnete Tangentenabschnitt die berechnete Steigung hat. Zusammen gehören (1) und (D), (2) und (B), (3) und (E), (4) und (A).

3. a) Siehe nebenan.

   b) Die Graphen der speziellen Lösungsen scheinen Halbkreise zu sein. Vermutung: Die allgemeine Lösung ist

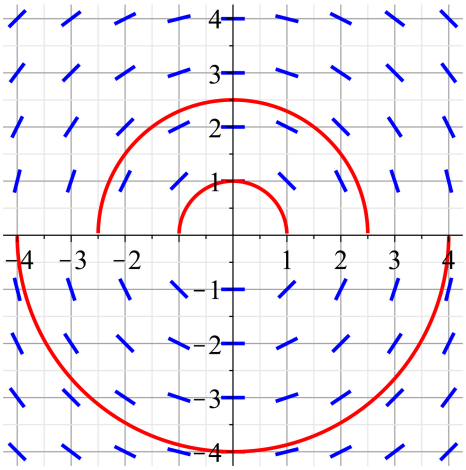
   $y : x \mapsto \sqrt{C - x^2}$ oder $y : x \mapsto -\sqrt{C - x^2}$,

   je nach dem Vorzeichen y_0. Kontrolle durch Nachrechnen.

   Die Konstante C ist das Quadrat des Kreisradius r.

   c) $y_1(x) = \sqrt{6.25 - x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

   $y_3(x) = -\sqrt{16 - x^2}$



4. Rechnen Sie nach!

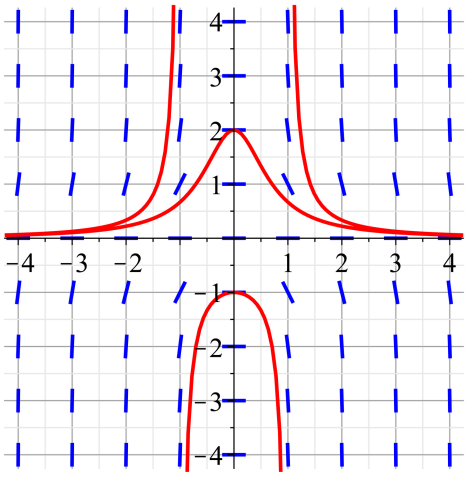
5. $x \cdot \underbrace{f_1'(x)}_{C} - \ln\underbrace{\left(f_1'(x)\right)}_{C} = C \cdot x - \ln C = f_1(x)$, $x \cdot \underbrace{f_2'(x)}_{\frac{1}{x}} - \ln\underbrace{\left(f_2'(x)\right)}_{\frac{1}{x}} = 1 + \ln x = f_2(x)$

6. a) $f: x \mapsto 0$ b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-C)^2} = -f(x)^2$ c) $f: x \mapsto 0$

   d) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x + \frac{1}{3}}$

7. a) $y'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+C)^2} = -2x \cdot \left(\dfrac{1}{x^2+C}\right)^2 = -2xy(x)^2$

   b) siehe nebenan. Der Graph durch (0, –1) macht bei x=–1 und x=1 einen Sprung und besteht aus drei Ästen.



   c) $y_1(x) = \dfrac{1}{x^2 + \frac{1}{2}}$, $y_2(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   d) Bei manchem CAS wird der Graph von y_2 unvollständig gezeichnet, weil das CAS nur den Ast zeichnet, auf welchem der Startpunkt liegt.

   e) $f: x \mapsto 0$

8. a) $\Delta N = \underbrace{-a}_{<0} \cdot N(t) \cdot \Delta t$ mit $a > 0$. Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ liefern $N'(t) = -a \cdot N(t)$, $a > 0$ und die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$.

   b) $N(t) = C \cdot e^{-a \cdot t}$, $a > 0$ c) $N(t) = N_0 \cdot e^{-a \cdot t}$, $a > 0$

9. $\Delta B = \underbrace{a \cdot B(t) \cdot \Delta t}_{\text{Geburten}} - \underbrace{b \cdot B(t) \cdot \Delta t}_{\text{Todesfälle}} + \underbrace{c \cdot \Delta t}_{\text{Zuwanderer}} - \underbrace{d \cdot \Delta t}_{\text{Auswanderer}}$, $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$

   Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ liefern

   $B'(t) = (a-b) \cdot B(t) + (c-d)$ und die Anfangsbedingung $B(0) = B_0$.

10. a) s(t) sei der Weg den der Körper in t Sekunden zurücklegt.

    Die nach unten wirkende Gewichtskraft ist $F_G(t) = m \cdot g$,

    die ihr entgegenwirkende Reibungskraft ist $F_R(t) = a \cdot \underbrace{s'(t)}_{\text{Geschwindigkeit}}$.

    Für die insgesamt nach unten wirkende Kraft ist

    $F(t) = m \cdot \underbrace{s''(t)}_{\text{Beschleunigung}} = F_G - F_R = m \cdot g - a \cdot s'(t)$, und Division durch m liefert

    $s''(t) = g - \dfrac{a}{m} \cdot s'(t)$ mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $s'(0) = 0$.

    b) Wie bei a) erhält man $s''(t) = g - \dfrac{b}{m} \cdot s'(t)^2$ mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $s'(0) = 0$.

11. T(t)=Temperatur des Tees zur Zeit t, T_U=Umgebungstemperatur; in einem kleinen Zeitintervall gilt $\Delta T = \underbrace{-a}_{<0} \cdot \left(T(t) - T_U\right) \cdot \Delta t$, $a > 0$; Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ liefern

    $T'(t) = -a \cdot \left(T(t) - T_U\right)$ mit der Nebenbedingung $T(0) = T_0$.

© Pythagoras Lehrmittel

12. S(t)=im Aquarium vorhandene Salzmenge zur Zeit t [kg]; t und Δt werden in Minuten gemessen. Im kleinen Intervall [t, t+Δt] lassen wir zuerst Aquariumwasser ablaufen und dann Salzlösung ins Aquarium einlaufen.

Salzverlust durch das Ablaufenlassen: $\underbrace{\frac{S(t)}{2700}}_{\text{Salzmenge pro Liter}} \cdot \underbrace{18}_{\text{Abfluss in 1 min}} \cdot \Delta t = \frac{S(t)}{150} \cdot \Delta t$,

Salzzunahme durch das Einlaufenlassen: $\underbrace{18}_{\text{Zufluss in 1 min}} \cdot \underbrace{\frac{3.5}{100}}_{\text{Salzgehalt in \%}} \cdot \Delta t = 0.63 \cdot \Delta t$,

Auswirkung beider Vorgänge auf S(t): $\Delta S = -\frac{S(t)}{150} \cdot \Delta t + 0.63 \cdot \Delta t$.

Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts $\Delta t \to 0$ liefern

$S'(t) = -\frac{1}{150} \cdot S(t) + 0.63$ mit der Nebenbedingung S(0)=0.

13. g(t) sei die im Blut vorhandene Menge an Traubenzucker. In einem kleinen Zeitintervall gilt $\Delta g = \underbrace{-g(t) \cdot b \cdot \Delta t}_{\text{Abbau}} + \underbrace{a \cdot \Delta t}_{\text{Zufuhr}}$, $a \geq 0, b \geq 0$; Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ liefern

$g'(t) = -g(t) \cdot b + a$ mit der Anfangsbedingung $g(0) = g_0$.

14. Annahmen: In einem kleinen Zeitintervall Δt ist der Zuwachs an informierten Personen …
   - … proportional zur Anzahl der bereits informierten Personen,
   - … proportional zur Anzahl der noch nicht informierten Personen (wenn diese Anzahl klein ist, wird es schwierig, noch einen Unwissenden zu finden),
   - … proportional zu Δt.

   Diese Annahmen führen zu $\Delta P = a \cdot P(t) \cdot \left(1000 - P(t)\right) \cdot \Delta t$; Division durch Δt und Bilden des Grenzwerts für $\Delta t \to 0$ liefern

   $P'(t) = a \cdot P(t) \cdot \left(1000 - P(t)\right)$ mit der Nebenbedingung P(0)=1.

15. $\left(N(t) \cdot e^{-a \cdot t}\right)' = N'(t) \cdot e^{-a \cdot t} + N(t) \cdot (-a) \cdot e^{-a \cdot t} = e^{-a \cdot t} \cdot \underbrace{\left(N'(t) - a \cdot N(t)\right)}_{\substack{0, \\ \text{weil N eine Lösung} \\ \text{der Differential-} \\ \text{gleichung ist}}} = 0.$

   Wenn die Ableitung einer Funktion für jedes t den Wert 0 annimmt, muss diese Funktion eine Konstante C sein:

   $N(t) \cdot e^{-a \cdot t} = C \overset{\cdot e^{a \cdot t}}{\Rightarrow} N(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$.

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. a) Die drei Schätzwerte sind 2.000, 2.250 und 2.441.

   b) $y(x) = e^x$, $y(1) = e \approx 2.718$

   c) 0.718, 0.468 und 0.277.

2. a) Die drei Schätzwerte sind 2.000, 2.500 und 2.883.

   b) $y'(x) = 2 \cdot e^x - 1 = 2 \cdot e^x - 1 \underbrace{-x + x}_{0} = y(x) - x$; $y(0) = 2 \cdot e^0 - 0 - 1 = 1$.

   c) 1.437, 0.937 und 0.554