30. Ergänzung: Uneigentliche Integrale

30.1 Überblick

Wir haben das Riemann'sche Integral $\int\limits_a^b f(x)dx$ unter folgenden Voraussetzungen entwickelt:

1. Die Intervallgrenzen a und b sind endlich.
2. Die Funktion f ist im Intervall [a, b] beschränkt, d. h., für alle $x \in [a, b]$ liegt der Funktionswert f(x) zwischen zwei festen Zahlen m und M: $m \le f(x) \le M$. In Kapitel 26 haben wir dies dadurch gewährleistet, dass wir die Stetigkeit von f im ganzen Intervall [a, b] vorausgesetzt haben.

Wenn man eine oder beide dieser Voraussetzungen fallen lässt, liegt kein Riemann'sches Integral mehr vor; man spricht dann von einem *uneigentlichen Integral*. Wir untersuchen in diesem Kapitel:

1. Wie berechnet man uneigentliche Integrale der Form $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ und $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$, bei denen *das jeweilige Integrationsintervall* nicht beschränkt ist?
2. Wie berechnet man uneigentliche Integrale, bei denen *die Funktion f* im Integrationsintervall [a, b] nicht beschränkt ist?

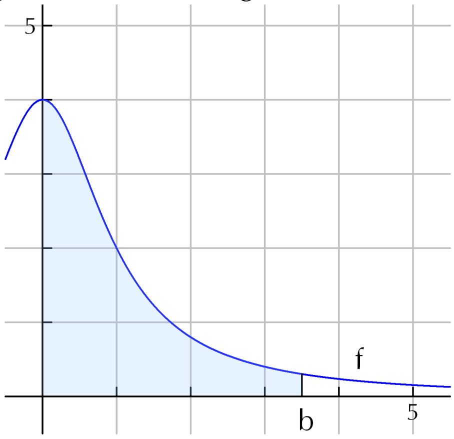
30.2 Integration über unbeschränkte Intervalle

30.2.1 Beispiele

Es sei $f: x \mapsto \frac{4}{1+x^2}$. Welchen Wert haben die Integrale

(1) $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ (2) $\int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx$ (3) $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx$ (4) $\int\limits_0^\infty \cos x dx$?

Keines dieser vier Integrale ist ein Riemann'sches Integral, weil ihre Integrationsintervalle unbeschränkt sind.



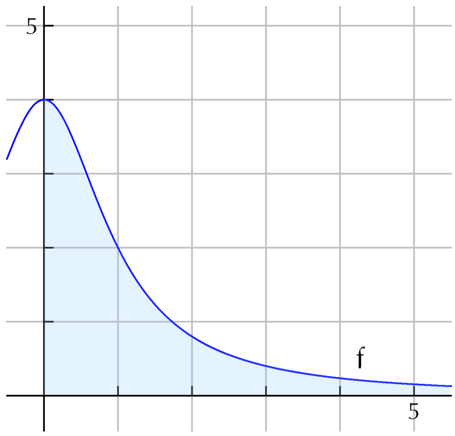
(1) Wir untersuchen zunächst das einfachere Riemann'sche Integral $\int\limits_0^b \frac{4}{1+x^2}dx$ für endliches b:

$$\int\limits_0^b \frac{4}{1+x^2}dx \overset{[27.5.C]}{=} \left[4 \cdot \arctan x\right]_0^b = 4 \cdot \arctan b.$$

Wenn b gegen ∞ strebt, strebt arctan b gegen $\frac{\pi}{2}$. Es liegt daher nahe, den Riemann'schen Integralbegriff so zu erweitern, dass gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{4}{1+x^2}\,dx = \left[4 \cdot \arctan x\right]_0^{\infty} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi\,.$$

Geometrisch kann dieser Wert als der Flächeninhalt des unendlich langen markierten Flächenstücks gedeutet werden (siehe nebenan). Dies zeigt, dass auch Flächen mit unendlichem Umfang einen endlichen Flächeninhalt haben können – eine Tatsache, die im Widerspruch zu unseren vom Alltag geprägten Vorstellungen von Umfang und Flächeninhalt einer Figur steht.

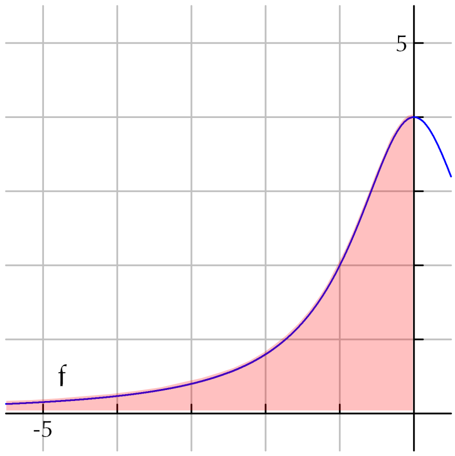


(2) Hier ist die untere Integrationsgrenze $-\infty$. Zunächst untersuchen wir wieder den einfacheren Fall des Riemann'schen Integrals für endliches und negatives a:

$$\int_a^{0} \frac{4}{1+x^2}\,dx = \left[4 \cdot \arctan x\right]_a^{0} = -4 \cdot \arctan a.$$

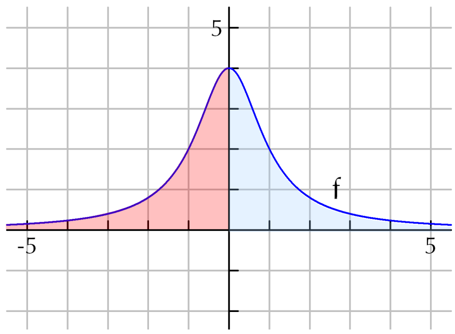
Wenn a gegen $-\infty$ strebt, strebt arctan a gegen $-\frac{\pi}{2}$. Es liegt daher nahe, den Riemann'schen Integralbegriff hier so zu erweitern, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+x^2}\,dx = \left[4 \cdot \arctan x\right]_{-\infty}^{0} = -4 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi\,.$$



(3) Wir greifen auf die Beispiele (1) und (2) zurück:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{1+x^2}\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+x^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{4}{1+x^2}\,dx \\ &= 2\pi + 2\pi \\ &= 4\pi.\end{aligned}$$



Diese drei Beispiele zeigen, wie man das bestimmte Integral definieren kann, wenn eine Integrationsgrenze oder sogar beide Integrationsgrenzen unendlich sind: mithilfe von Grenzwertüberlegungen.

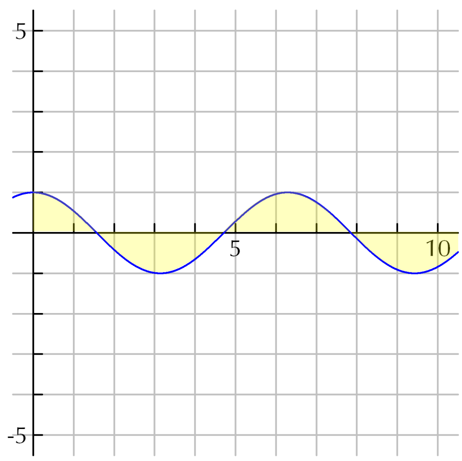
(4) Wieder untersuchen wir zuerst das Riemann'sche Integral $\int_0^b \cos x\,dx$. Für endliches b gilt

$$\int_0^b \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_0^b = \sin b.$$

Für $b \to \infty$ strebt sin b *nicht* gegen eine feste Zahl, der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x\,dx = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

existiert *nicht*. Daher existiert auch das Integral $\int_0^{\infty} \cos x\,dx$ *nicht*.



♦

Damit wir $\int_a^\infty f(x)dx$ mithilfe der oben angestellten Grenzwertüberlegungen überhaupt definieren können, fordern wir:

1. $\int_a^b f(x)dx$ muss für jedes b>a existieren. Dadurch wird sichergestellt, dass beim „Herantasten" an den Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ jedes Integral existiert.
2. Der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ muss existieren. Dadurch wird der Fall ausgeschlossen, der bei Beispiel (4) eingetreten ist.

Falls beide Forderungen erfüllt sind, definieren wir $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Diese Forderungen gelten sinngemäss auch für uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

30.2.2 Definition

(1) Wenn die Funktion f in jedem Intervall [a, b] (a<b) im Riemann'schen Sinn integrierbar ist und der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ existiert, dann definiert man

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ nicht.

(2) Wenn die Funktion f in jedem Intervall [a, b] (a<b) im Riemann'schen Sinn integrierbar ist und der Grenzwert $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ existiert, dann definiert man

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ nicht.

(3) Falls die beiden Integrale $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ und $\int_c^\infty f(x)dx$ für eine beliebige Zahl c existieren, definiert man

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nicht.

Eine Bemerkung zu (3): Für die hier auftretende Integrationsgrenze c haben wir bei Beispiel (3) von 30.2.1 c=0 gewählt. Dies war sehr bequem, weil wir die dadurch entstehenden Teilintegrale bei den Beispielen (1) und (2) bereits berechnet hatten. Aber auch jede andere Wahl für c wäre denkbar gewesen und hätte zu demselben Resultat geführt. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

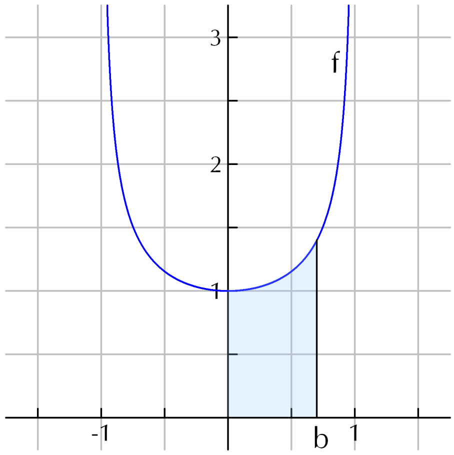
30.3 Integration unbeschränkter Funktionen

30.3.1 Beispiele

Es sei $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Welchen Wert haben die Integrale

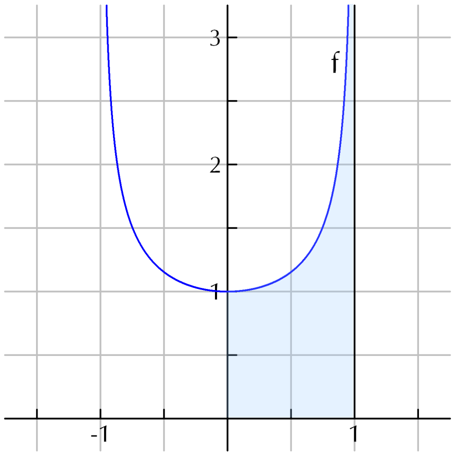
(1) $\int_0^1 f(x)dx$ (2) $\int_{-1}^0 f(x)dx$ (3) $\int_{-1}^1 f(x)dx$ (4) $\int_0^2 \frac{2}{x^2}dx$ (5) $\int_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx$?

(1) Das gesuchte Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ existiert im Riemann'schen Sinne *nicht*, weil f(1) nicht definiert ist. Es existiert zu diesem Integral keine einzige Obersumme. Wie auch immer wir das Intervall [0, 1] zerlegen, stets nimmt f(x) im letzten Teilintervall beliebig grosse Werte an.
Deshalb untersuchen wir mithilfe eines Grenzwertes, was geschieht, wenn wir uns immer näher an die Stelle x=1 „herantasten".
Dazu bestimmen wir das Riemann'sche Integral $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Für $b\in(0, 1)$ ist:



$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \overset{\substack{[27.5.C]\\(\text{Anhang } 3)}}{=} [\arcsin x]_0^b = \arcsin b.$$

Wenn b gegen 1 strebt, strebt arcsin b gegen $\frac{\pi}{2}$.
Es liegt daher nahe, den Riemann'schen Integralbegriff so zu erweitern, dass

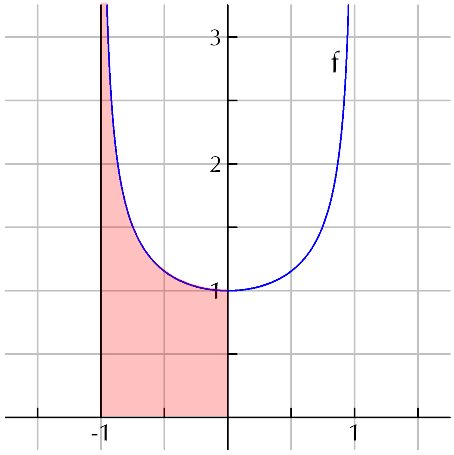


$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = [\arcsin x]_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

gilt.
Dies bedeutet anschaulich, dass die blau markierte Fläche einen endlichen Inhalt, aber einen unendlichen Umfang besitzt.

(2) Wieder existiert das Integral $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ im Riemann'schen Sinne *nicht*, weil f(–1) nicht definiert ist. Es existiert keine einzige Obersumme. Deshalb „tasten" wir uns wieder mithilfe eines Grenzwertes an die Stelle x=–1 heran.

Dazu untersuchen wir zunächst das Riemann'sche Integral $\int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.



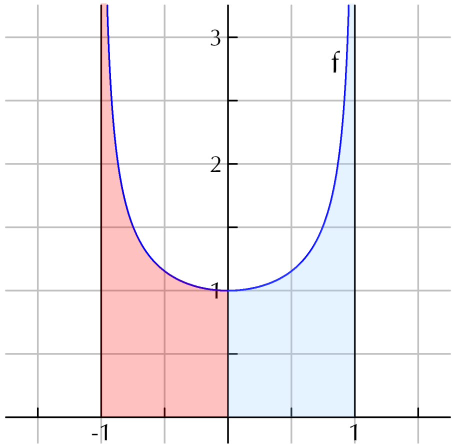
Für $a \in (-1, 0)$ ist

$$\int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_a^0 = -\arcsin a.$$

Wenn a gegen -1 strebt, strebt arcsin a gegen $-\frac{\pi}{2}$. Es liegt daher nahe, den Riemann'schen Integralbegriff so zu erweitern, dass

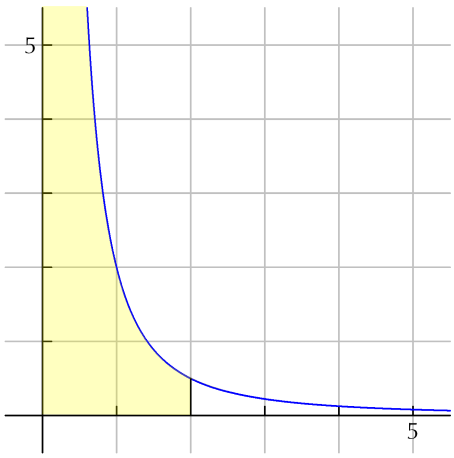
$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_{-1}^0 = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$$

gilt.



(3) Auch dieses Integral existiert im Riemann'schen Sinne nicht, weil weder $f(-1)$ noch $f(1)$ definiert ist. Es existiert keine einzige Obersumme.
Wenn wir dieses Integral aber als uneigentliches Integral behandeln, erhalten wir mit Rückgriff auf die Resultate der Beispiele (1) und (2)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\\ &= \pi.\end{aligned}$$



(4) Dieses Integral existiert im Riemann'schen Sinne ebenfalls nicht, weil $f(0)$ nicht definiert ist. Es existiert keine einzige Obersumme.
Aber wir können dieses Integral ebenso als uneigentliches Integral behandeln wie Beispiel (2): Für das Riemann'sche Integral mit $0<a<2$ ist

$$\int_a^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_a^2 = -1 + \frac{2}{a}.$$

Um das ursprünglich gesuchte Integral

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$$

zu berechnen, lassen wir $a \downarrow 0$ streben:

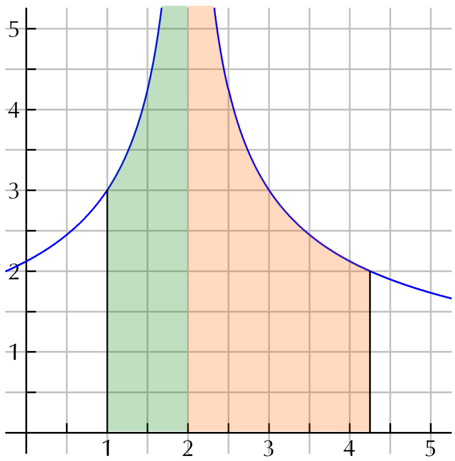
$$\lim_{a\downarrow 0} \int_a^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{a\downarrow 0}\left(-1 + \frac{2}{a}\right) = \infty,$$

d. h. der Grenzwert existiert *nicht*.

Deshalb existiert auch das gesuchte uneigentliche Integral $\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$ *nicht*.

Wie schon bei Beispiel 30.2.1(4) zeigt sich hier wieder, dass uneigentliche Integrale nicht immer existieren.

(5) Auch dieses Integral existiert im Riemann'schen Sinn nicht, weil $x=2$ eine Unendlichkeitsstelle ist.
Wir unterteilen das Integrationsintervall [1, 4.25] bei der Unendlichkeitsstelle in zwei Abschnitte und integrieren über jedem Abschnitt separat:



$$\int_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx = \int_1^{2} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx + \int_2^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx.$$

In jedem der beiden Teilintegrale liegt die Unendlichkeitsstelle am Rand, und diesen Fall haben wir bereits behandelt.

Um die Integration etwas zu vereinfachen, beseitigen wir die Betragszeichen bei den Integranden:

Für $x>2$ ist der Integrand $\frac{3}{\sqrt{x-2}}$, und für $x<2$ ist der Integrand $\frac{3}{\sqrt{2-x}}$. Daher ist

$$\int_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx = \int_1^{2} \frac{3}{\sqrt{2-x}}dx + \int_2^{4.25} \frac{3}{\sqrt{x-2}}dx.$$

Es folgt die Berechnung der beiden uneigentlichen Teilintegrale:

$$\int_1^{2} \frac{3}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{t\uparrow 2}\int_1^{t} \frac{3}{\sqrt{2-x}}dx = \lim_{t\uparrow 2}\underbrace{\left[-6\sqrt{2-x}\right]_1^t}_{\text{Kontrolle durch Ableiten}} = \lim_{t\uparrow 2}\left(\left(-6\sqrt{2-t}\right)-\left(-6\right)\right) = 6,$$

$$\int_2^{4.25} \frac{3}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{t\downarrow 2}\int_t^{4.25} \frac{3}{\sqrt{x-2}}dx = \lim_{t\downarrow 2}\left[6\sqrt{x-2}\right]_t^{4.25} = \lim_{t\downarrow 2}\left(\left(9\right)-\left(6\sqrt{t-2}\right)\right) = 9.$$

Insgesamt ist also

$$\int_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx = \int_1^{2} \frac{3}{\sqrt{2-x}}dx + \int_2^{4.25} \frac{3}{\sqrt{x-2}}dx = 6+9=15.$$

Wenn nur eines der beiden Teilintegrale nicht existierte, würde auch das gesuchte Integral $\int_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx$ nicht existieren.

♦

Analog zum letzten Abschnitt definieren wir:

30.3.2 Definition

(1) Es sei f im Intervall [a, b) definiert und an der Stelle b nicht beschränkt: $\lim_{x\uparrow b} f(x) = +\infty$ oder $\lim_{x\uparrow b} f(x) = -\infty$.

Wenn die Funktion f in jedem Intervall [a, t] ($a<t<b$) im Riemann'schen Sinn integrierbar ist und der Grenzwert $\lim_{t\uparrow b}\int_a^t f(x)dx$ existiert, dann definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\uparrow b}\int_a^t f(x)dx.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ nicht.

(2) Es sei f im Intervall (a, b] definiert und an der Stelle a nicht beschränkt: $\lim_{x\downarrow a} f(x) = +\infty$ oder $\lim_{x\downarrow a} f(x) = -\infty$.

Wenn die Funktion f in jedem Intervall [t, b] (a<t<b) im Riemann'schen Sinn integrierbar ist und der Grenzwert $\lim\limits_{t\downarrow a}\int_t^b f(x)dx$ existiert, dann definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\downarrow a}\int_t^b f(x)dx.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ nicht.

(3) Es sei f im Intervall (a, b) definiert und weder bei a noch bei b beschränkt. Falls die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ für irgendein $c\in(a, b)$ existieren, definiert man

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ nicht.

(4) Es sei f im Intervall [a, b] überall ausser an der Stelle $c\in(a, b)$ definiert und an der Stelle c nicht beschränkt. Falls die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ existieren, definiert man

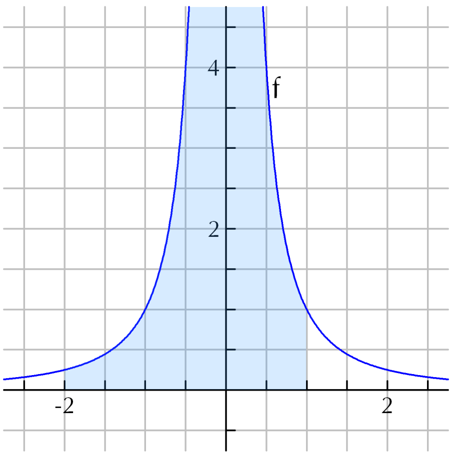
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Andernfalls existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ nicht.

30.3.3 Beispiel

Berechnen Sie das Integral $\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ …

a) … als uneigentliches Integral,
b) … als gewöhnliches Riemann-Integral.



a) Die Funktion $f: x\mapsto \frac{1}{x^2}$ ist an der Stelle c=0, welche *im Innern* des Integrationsintervalls [–2, 1] liegt, nicht beschränkt. Mit Definition 30.3.2 (4) gilt

$$\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-2}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\uparrow 0}\int_{-2}^{b}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{a\downarrow 0}\int_{a}^{1}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{b\uparrow 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{b} + \lim_{a\downarrow 0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{0}^{1} = \underbrace{\lim_{b\uparrow 0}\left(-\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\right)}_{\infty} + \underbrace{\lim_{a\downarrow 0}\left(-1+\frac{1}{a}\right)}_{\infty} = \infty,$$

d. h., dieses Integral existiert nicht.

b) Wir erhalten

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{1} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

♦

Welches Ergebnis ist richtig, und wo steckt der Fehler? Der Graph von f legt nahe, dass das negative Ergebnis von b) falsch ist. Tatsächlich darf der 2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Satz 27.6.3 (Anhang 2), hier nicht angewendet werden. Denn weil f an der Stelle $x=0$ nicht definiert ist, ist f nicht im ganzen Intervall $[-2, 1]$ stetig.
Weil f an der Stelle $x=0$ nicht beschränkt ist, liegt ein uneigentliches Integral vor, weshalb die richtige Antwort ist: Das Integral $\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ existiert nicht.

30.3.4 Warnung

Wenn in Zukunft ein Integral $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ auftritt, muss zuerst untersucht werden – z. B. anhand des Graphen von f –, ob f im ganzen Intervall $[a, b]$ beschränkt ist oder nicht. Im zweiten Fall muss das Integral zwingend als uneigentliches Integral behandelt werden!

30.4 Anwendungen uneigentlicher Integrale

A. Physikalische Arbeit

30.4.1 Beispiel

Welche Arbeit muss verrichtet werden, um einen Körper der Masse $m=1$ kg …
a) … auf die Höhe $h=36'000$ km über der Erdoberfläche zu bringen?
b) … unendlich weit von der Erde wegzubringen?
Hinweise

- Ein Satellit rotiert um die Erde; seine Umlaufszeit hängt von der Höhe ab, in der er sich befindet. Ein Satellit, der sich rund 36'000 km über der Erdoberfläche befindet, hat eine Umlaufzeit von 24 Stunden und scheint deshalb gar nicht um die Erde zu rotieren, weil er immer über demselben Punkt der Erdoberfläche steht. Deshalb sind in dieser Höhe viele Satelliten stationiert, z. B. Wettersatelliten und Fernsehsatelliten.
- Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass sich zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 und dem Abstand r der Kugelmittelpunkte mit der Kraft

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

anziehen, wobei $\gamma \approx 6.673 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, der Erdradius $\approx 6.371 \cdot 10^6$ m und die Erdmasse $\approx 5.976 \cdot 10^{24}$ kg ist.

a) $W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\,dr = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{6'371'000}^{42'371'000} \frac{1}{r^2}\,dr = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{-1}{r}\right]_{6'371'000}^{42'371'000}$

$$W = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{-1}{42'371'000} - \frac{-1}{6'371'000}\right) \approx 5.318 \cdot 10^7 \text{ J}$$

b) $W = \int_{r_1}^{\infty} F(r)dr = \lim_{r_2\to\infty} \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \gamma\cdot m_1\cdot m_2\cdot \lim_{r_2\to\infty} \int_{6'371'000}^{r_2} \frac{1}{r^2}dr$

$$= \gamma\cdot m_1\cdot m_2\cdot \lim_{r_2\to\infty}\left[\frac{-1}{r}\right]_{6'371'000}^{r_2}$$

$$= \gamma\cdot m_1\cdot m_2\cdot\left(0-\frac{-1}{6'371'000}\right) \approx 6.259\cdot 10^7 \text{ J}$$

Dieses Ergebnis ist nicht viel grösser als das Ergebnis von Aufgabe a).

♦

B. Versiegender Brunnen

30.4.2 Beispiel

Die Quellstärke eines Brunnens betrug vor 30 Tagen 120 l/min, jetzt nur noch 80 l/min. Wir nehmen an, dass die Quellstärke nach der Formel $Q(t) = A\cdot e^{-B\cdot t}$ abnimmt, wobei A und B geeignet gewählte positive Zahlen sind. Wie viel Wasser wird der Brunnen von heute an insgesamt noch ausschütten?

Zunächst bestimmen wir A und B. Aus den Angaben Q(–30)=120 und Q(0)=80 erhalten wir das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} A\cdot e^{30B} = 120 \\ A\cdot e^{0} = 80 \end{array} \right|.$$

Weil $e^0 = 1$ ist, liefert die zweite Gleichung A=80.

Durch Einsetzen von A=80 in die erste Gleichung erhalten wir zunächst

$$80\cdot e^{30\cdot B} = 120,$$

dann

$$e^{30\cdot B} = 1.5$$

und schliesslich

$$B = \tfrac{1}{30}\cdot \ln 1.5 \approx 0.0135.$$

Somit ist

$$Q(t) = 80\cdot e^{-0.0135\cdot t}.$$

Wenn wir noch beachten, dass t in *Tagen* gemessen wird, Q(t) aber in Litern pro *Minute*, folgt: Der Brunnen wird noch

$$1440\cdot \int_0^{\infty} Q(t)dt \approx 8'520'000 \text{ Liter Wasser}$$

ausschütten.

♦

30.5 Ergänzung: Konvergenz und Divergenz von Reihen

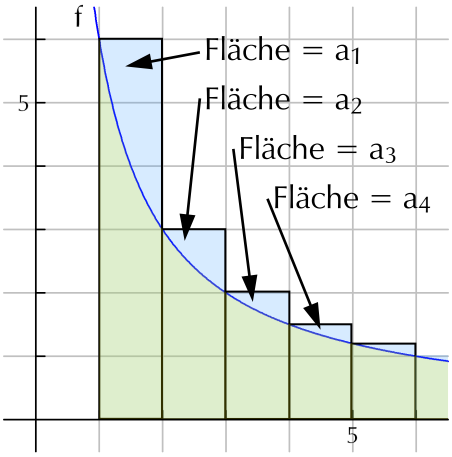
Manchmal kann man mithilfe von uneigentlichen Integralen entscheiden, ob eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert oder nicht. Voraussetzung ist, dass die Summanden a_1, a_2, a_3, … positiv sind und eine monoton fallende Folge bilden.

30.5.1 Beispiele

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{i} = 6+3+2+1.5+1.2+1+\ldots$ (2) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{i^2} = 6+1.5+0.666\ldots+0.375+\ldots$

(1) Diese Reihe ist eine Obersumme (dargestellt als Rechtecksflächen) für das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{6}{x}dx$; deshalb gilt sicher



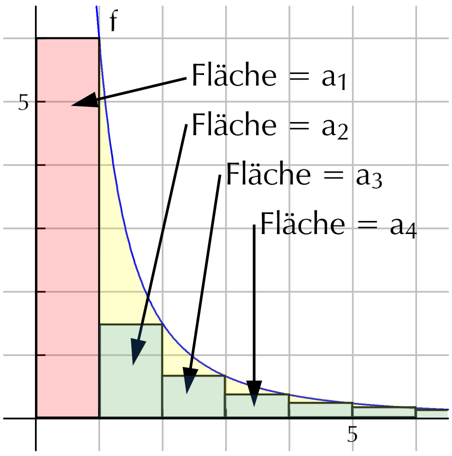
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{i} > \int_1^{\infty} \frac{6}{x}dx. \qquad \textbf{[30.1]}$$

Für das uneigentliche Integral erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \frac{6}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{6}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \left[6\cdot \ln x\right]_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty} (6\cdot \ln b - 0) = \infty.$$

Wenn schon das uneigentliche Integral nicht existiert, existiert der Grenzwert für die zu untersuchende Obersumme wegen [30.1] erst recht nicht, d. h., die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{i}$ divergiert.

(2) Die Reihe ist eine Untersumme für das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{6}{x^2}dx$. Zur Vereinfachung lassen wir den Summanden $a_1=6$ (bzw. das rote Rechteck) weg; es verbleibt die Untersumme $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{6}{i^2}$ für das gelb markierte Integral $\int_1^{\infty} \frac{6}{x^2}dx$. Deshalb gilt sicher



$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{6}{i^2} < \int_1^{\infty} \frac{6}{x^2}dx. \qquad \textbf{[30.2]}$$

Für das uneigentliche Integral erhalten wir

$$\int_1^{\infty} \frac{6}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-6}{x}\right]_1^b = 6.$$

Wenn schon das uneigentliche Integral existiert, existiert wegen [30.2] erst recht der Grenzwert für die Untersumme $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{6}{i^2}$. Auch die ursprüngliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{i^2}$ konvergiert, denn das Weglassen des Summanden $a_1=6$ hat keinen Einfluss auf die Konvergenz.

♦

Woher weiss man eigentlich, ob man eine Reihe als Untersumme oder als Obersumme für ein uneigentliches Integral deuten soll? Wenn man die *Konvergenz* der Reihe nachweisen will, deutet man sie als Untersumme; wenn man die *Divergenz* der Reihe nachweisen will, deutet man sie als Obersumme.

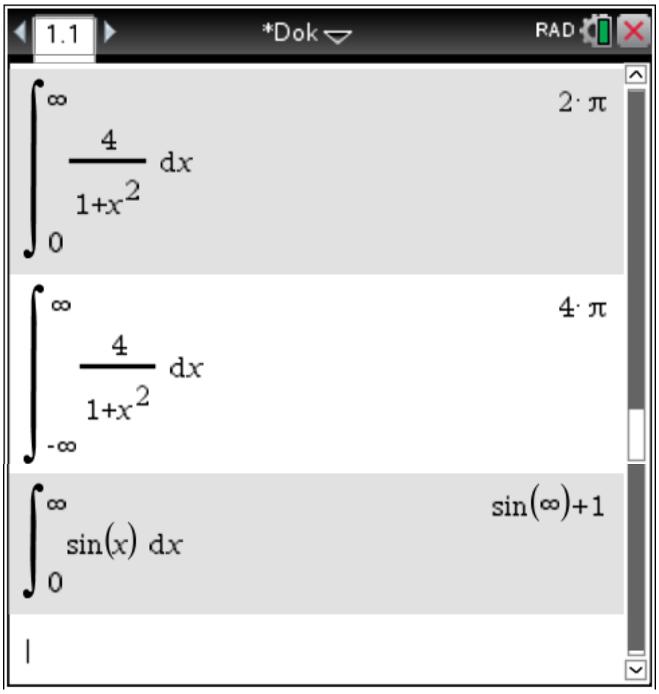
30.6 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

30.6.1 Beispiele

Welchen Wert haben folgende Integrale, deren *Integrationsintervall* nicht beschränkt ist?

(1) $\int\limits_0^\infty \frac{4}{1+x^2}dx$ (2) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{4}{1+x^2}dx$ (3) $\int\limits_0^\infty \sin x dx$

(1) integral(4/(1+x ^ 2▶), x, 0, infinity) `Enter`



(2) integral(4/(1+x ^ 2▶), x, –infinity, infinity) `Enter`

(3) integral(sin(x), x, 0, infinity) `Enter`

Weil sin(∞) nicht definiert ist, existiert das gesuchte Integral nicht. Es wäre schön, wenn das CAS dies selber „merken“ und eine entsprechende Meldung anzeigen würde. Leistungsfähigere CAS meistern diese Aufgabe problemlos. ♦

30.6.2 Beispiele

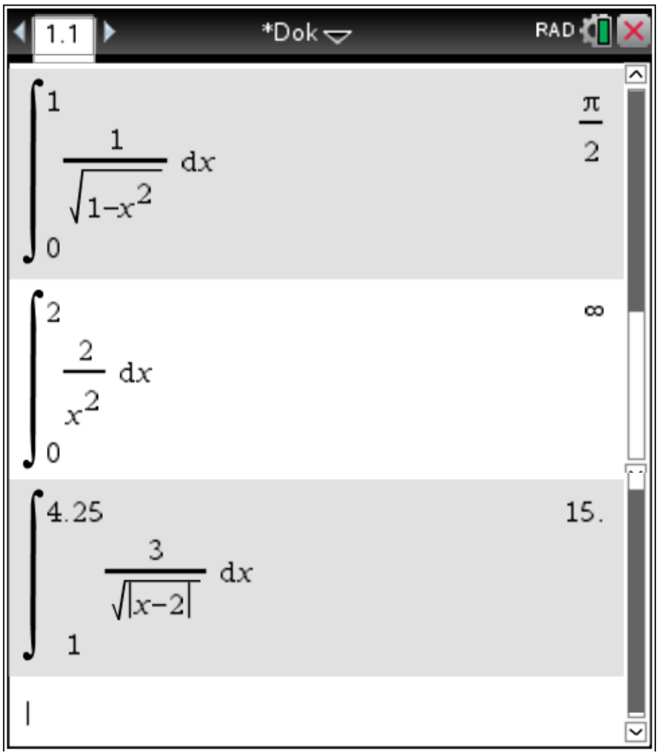
Welchen Wert haben folgende Integrale, deren *Funktion* nicht beschränkt ist?

(1) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2) $\int\limits_0^2 \frac{2}{x^2}dx$ (3) $\int\limits_1^{4.25} \frac{3}{\sqrt{|x-2|}}dx$

(1) integral(1/sqrt(1–x ^ 2▶), x, 0, 1) `Enter`

(2) integral(2/x ^ 2▶, x, 0, 2) `Enter`

(3) integral(3/sqrt(abs(x–2)), x, 1, 4.25) `Enter`



♦

30.7 Übungen

A. Fragen zum Grundstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Worin besteht der Unterschied zwischen einem Riemann'schen Integral und einem uneigentlichen Integral?
2. Wie sind die uneigentlichen Integrale $\int_a^{\infty} f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ definiert? Unter welchen Voraussetzungen existieren sie überhaupt? Geben Sie je ein Beispiel und rechnen Sie das uneigentliche Integral aus.
3. Wie ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ definiert, wenn …
   a) … f an der Randstelle a nicht beschränkt ist,
   b) … f an der Stelle c im Innern des Intervalls [a, b] nicht beschränkt ist?
   Geben Sie je ein Beispiel und rechnen Sie das uneigentliche Integral aus.
4. Wie erkennt man, ob $\int_a^b f(x)dx$ mit endlichen Zahlen a und b ein Riemann'sches Integral oder ein uneigentliches Integral ist?

B. Frage zum Ergänzungsstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Wie kann man mithilfe von uneigentlichen Integralen untersuchen, ob eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert oder divergiert? Welche Voraussetzung müssen die Summanden a_1, a_2, a_3, … erfüllen?

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Welche der folgenden Integrale sind Riemann'sche Integrale, welche sind uneigentliche Integrale? Sie brauchen ihre Werte nicht zu berechnen.
   $\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$, $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-4}dx$, $\int_1^3 \frac{1}{x^2-4}dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{12}{x^2+1}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx$, $\int_0^{\pi} \sin x dx$, $\int_0^{\pi} \tan x$
2. Berechnen Sie jeweils $\int_1^{10} f(x)dx$, $\int_1^{100} f(x)dx$, $\int_1^{1000} f(x)dx$, $\int_1^{10'000} f(x)dx$ und $\int_1^{\infty} f(x)dx$.
   a) $f: x \mapsto \frac{1}{100}x$
   b) $f: x \mapsto \frac{12}{x}$
   c) $f: x \mapsto \frac{12}{x^2}$
   d) $f: x \mapsto \frac{12}{x^{1.5}}$
   e) $f: x \mapsto \sin(x)$
   f) $f: x \mapsto \ln x$

3. Berechnen Sie jeweils beide Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_1^b \frac{1}{x}dx \;\; (b>0),\;\; \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ b) $\int_1^b \frac{1}{x^2}dx \;\; (b>0),\;\; \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

c) $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx \;\; (b>0),\;\; \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ d) $\int_1^b \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}dx \;\; (b>0),\;\; \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}dx$

e) $\int_e^b \ln x\,dx \;\; (b>0),\;\; \int_e^\infty \ln x\,dx$ f) $\int_1^b \sin x\,dx,\;\; \int_1^\infty \sin dx$

4. Berechnen Sie jeweils $\int_{-10}^{-4} f(x)dx$, $\int_{-100}^{-4} f(x)dx$, $\int_{-1000}^{-4} f(x)dx$, $\int_{-10'000}^{-4} f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^{-4} f(x)dx$.

a) $f: x \mapsto 0.16x$ b) $f: x \mapsto \frac{16}{x}$ c) $f: x \mapsto \frac{16}{x^2}$ d) $f: x \mapsto \frac{16}{x^3}$

e) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(x)$ f) $f: x \mapsto e^x$

5. Berechnen Sie jeweils beide Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_a^{-2} \frac{6}{x^2}dx \;\; (a<0),\;\; \int_{-\infty}^{-2} \frac{6}{x^2}dx$ b) $\int_a^{-1} -\frac{4}{x^3}dx \;\; (a<0),\;\; \int_{-\infty}^{-1} -\frac{4}{x^3}dx$

c) $\int_a^{-1} \frac{x+x^2}{x^4}dx \;\; (a<-1),\;\; \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+x^2}{x^4}dx$ d) $\int_a^0 e^x\,dx,\;\; \int_{-\infty}^0 e^x dx$

6. Berechnen Sie jeweils beide Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_a^1 \frac{1}{x}dx \;\; (0<a<1),\;\; \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ b) $\int_a^1 \frac{3}{x^2}dx \;\; (0<a<1),\;\; \int_0^1 \frac{3}{x^2}dx$

c) $\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \;\; (0<a<1),\;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ d) $\int_1^b \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx \;\; (b>1),\;\; \int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

e) $\int_a^1 \ln x\,dx \;\; (0<a<1),\;\; \int_0^1 \ln x\,dx$ f) $\int_0^b \tan x\,dx \;\; (0<b<\frac{1}{2}\pi),\;\; \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan x\,dx$

7. Wie gross muss die positive Zahl a sein, damit $\int_a^\infty f(x)dx < 0.001$ ist?

a) $f: x \mapsto \frac{5}{x^2}$ b) $f: x \mapsto \frac{5}{x^{1.5}}$ c) $f: x \mapsto \frac{8\sqrt{x}}{x^3}$

8. Ein Fabrikant hat 100'000 Glühbirnen hergestellt. d(t) ist die gesamte Anzahl der Glühbirnen, die innerhalb der ersten t Betriebsstunden durchbrennen oder aus anderen Gründen kaputtgehen.
a) Wie dürfte der Graph von d aussehen?
b) Wie kann die Ableitung $a(t)=d'(t)$ gedeutet werden?
c) Berechnen Sie $\int_0^\infty a(t)dt$.

9. Der Graph der Funktion f rotiert im angegebenen Bereich um die x-Achse. Welches Volumen hat der dabei entstehende Rotationskörper?

a) $f: x \mapsto \frac{9}{x},\;\; x \le -1$ b) $f: x \mapsto \frac{12}{\sqrt{x}},\;\; x \ge 2$ c) $f: x \mapsto \frac{4\sqrt{x}}{x^3},\;\; x \ge 2$

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

   a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^2}dx$ b) $\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)dx$ c) $\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x}dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

   a) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}dx$ b) $\int\limits_{-\infty}^{0} 3e^{0.2x+1}dx$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

   a) $\int\limits_4^{8} \frac{1}{\sqrt{x-4}}dx$ b) $\int\limits_{-3}^{8} \frac{1}{x+3}dx$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren. Manchmal kann das Zeichnen des Graphen hilfreich sein.

   a) $\int\limits_1^{3} \frac{1}{x-2}dx$ b) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx$ c) $\int\limits_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}dx$

   d) $\int\limits_0^{5} \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx$ e) $\int\limits_0^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren. Treffen Sie Fallunterscheidungen, wenn dies nötig ist.

   a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^r}dx \ (r>0)$ b) $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^r}dx \ (r>0)$ c) $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^r}dx \ (r>0)$

6. Man darf $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ *nicht* als $\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ definieren. Berechnen Sie die beiden Integrale für die Funktion $f: x \mapsto x$, um dies zu illustrieren.

7. Der Graph der Funktion f rotiert im angegebenen Bereich um die x-Achse. Welches Volumen hat der dabei entstehende Rotationskörper?

   a) $f: x \mapsto \frac{1}{2x+1},\ x \geq 0$ b) $f: x \mapsto \frac{1}{2x+1},\ x \geq -1$ c) $f: x \mapsto e^x,\ x \leq 0$

8. An den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2}$ wird im Punkt P(–2, …) die Tangente t gelegt. Die x-Achse, die Tangente t und der Graph von f begrenzen für $x \leq -2$ ein Flächenstück. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

9. Vom Punkt P(4, 0) aus wird die Tangente t an den Graphen der Funktion $f: x \mapsto \frac{54}{x^3}$ gelegt. Wie gross ist der Inhalt der folgenden Flächenstücke?

   a) Es wird durch die y-Achse, die Tangente t und den Graphen von f begrenzt und liegt links oberhalb des Berührungspunktes B.

   b) Es wird durch die x-Achse, die Tangente t und den Graphen von f begrenzt und liegt rechts unterhalb des Berührungspunktes B.

10. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{100x+200}{x^3}$ und $h: x \mapsto \frac{150}{x^2}$.

    a) Welchen Inhalt hat das Flächenstück rechts von der Geraden g: x=1, das von der x-Achse und dem Graphen von f begrenzt wird?

b) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das von der x-Achse und vom Graphen von f begrenzt wird und links von der Nullstelle von f liegt?
c) In welchem Punkt S und unter welchem Winkel α schneiden sich die Graphen von f und h?
d) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das die Graphen von f und h rechts von S einschliessen?
e) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das die Graphen von f und h zwischen der y-Achse und dem Punkt S einschliessen?
f) Diskutieren Sie die Funktion f: Polstellen, Definitionsbereich, Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte, Graph.

11. Die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto e^{a \cdot x}$ $(a > 0)$ und $g: x \mapsto e^{-b \cdot x}$ $(b > 0)$ sowie die x-Achse begrenzen ein Flächenstück.
a) Wie gross ist sein Flächeninhalt?
b) In welchem Punkt S und unter welchem Winkel α schneiden sich die Graphen von f und g, wenn a=b=2 ist?
c) Wir nehmen an, dass sich die Graphen von f und g unter einem rechten Winkel schneiden. Welche Beziehung gilt zwischen a und b?
d) Wir nehmen an, dass das Flächenstück rechtwinklig ist. Für welche Werte von a und b wird seine Fläche minimal?

12. Die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto e^{x}$ und $g: x \mapsto e^{-x+a}$ sowie die x-Achse begrenzen ein Flächenstück mit dem Inhalt 4. Wie gross ist a?

13. Die *Gammafunktion* Γ dient unter anderem dazu, die Fakultät n! einer Zahl n nicht nur für natürliche Zahlen zu definieren, sondern auch für reelle Zahlen. Γ ist definiert durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$, und für natürliche Zahlen gilt $n! = \Gamma(n+1)$.
a) Berechnen Sie ohne Integration $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$ und $\Gamma(n)$.
b) [CAS] Berechnen Sie $\Gamma(0)$, $\Gamma(0.5)$, $\Gamma(1.5)$, $\Gamma(\pi)$
c) [CAS] Berechnen Sie $\Gamma(-0.5)$, $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-1.5)$, $\Gamma(-2)$, $\Gamma(-\pi)$. Vorsicht: Die Berechnung von $\Gamma(x)$ für $x<0$ gelingt nicht mit jedem CAS!
d) [CAS] Stellen Sie den Graphen von Γ für $x>0$ dar, und bestimmen Sie näherungsweise den Tiefpunkt von Γ.
e) [CAS] Stellen Sie den Graphen von Γ auch für $x<0$ dar, sofern Sie ein geeignetes CAS zur Verfügung haben.

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_0^\infty \frac{8}{x^2+4} dx$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2} dx$ c) $\int_{a+1}^\infty \frac{1}{x^2-a^2} dx$

2. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_{-\infty}^1 \frac{4}{x^2+1} dx$ b) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{4}{x^2-1} dx$ c) $\int_{-\infty}^{-4} \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int_1^4 \frac{1}{x^2-16} dx$ b) $\int_{-5}^5 \frac{1}{\sqrt{25-x^2}} dx$ c) $\int_0^2 \frac{4}{4-x^2} dx$

4. Berechnen Sie jeweils alle drei Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

c) $\int\limits_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren:

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4+x^2}dx$ b) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2-4}dx$

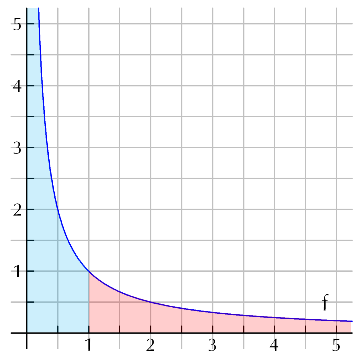
d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tan^{-1} x\,dx$ e) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$ f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{(1+|x|)^2}dx$

6. Untersuchen Sie mithilfe von Integralen, ob die folgenden Reihen konvergent oder divergent sind:

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i}$ b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{i}}$ c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} e^{-i}$

d) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$ e) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1}$ f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i^2+1}}$

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale, sofern sie existieren.
Hinweis: Alle diese Integrale sind aus zwei Gründen uneigentliche Integrale: Sowohl das Integrationsintervall als auch die zu integrierende Funktion f sind unbeschränkt.
In solchen Fällen zerlegt man das unbeschränkte Integrationsintervalls in zwei Teilintervalle: ein beschränktes Intervall, in dem f unbeschränkt ist, und ein unbeschränktes Intervall, in dem f beschränkt ist. Beispiel:



$$\underbrace{\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x}dx}_{\substack{\text{Intervall und f} \\ \text{unbeschränkt}}} = \underbrace{\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}dx}_{\substack{\text{Intervall beschränkt,} \\ \text{f unbeschränkt}}} + \underbrace{\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x}dx}_{\substack{\text{Intervall unbeschränkt,} \\ \text{f beschränkt}}}$$

a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int\limits_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$ c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx$

d) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx$ (Zeigen Sie zunächst: $F: x \mapsto 2\cdot\tan^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ ist eine Stammfunktion.)

F. Anspruchsvollere Aufgaben zum Ergänzungsstoff

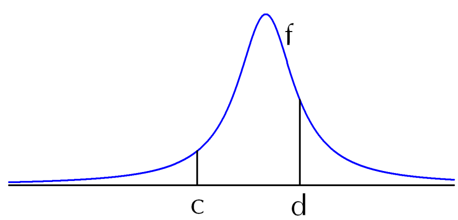
1. Wie gross ist die Fläche, welche vom Graphen von f, seinen Polen und seinen Asymptoten insgesamt eingeschlossen wird?

a) $f: x \mapsto \frac{4x^2}{x^2+3}$ b) $f: x \mapsto \frac{x^2-2x+2}{x-1}$

2. Der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{a}{x^2+b}$ $(b > 0)$ hat den Wendepunkt W(2, 1). Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

3. Der Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{243}{(2x+1)^2}$ und der Kreis k mit Mittelpunkt M(0, 0) berühren sich. Die positive x-Achse, der Kreis k und der Graph von f begrenzen ein rechts vom Berührungspunkt B liegendes Flächenstück. Wie gross ist sein Flächeninhalt?

4. Gemäss Definition 30.2.2 (3) ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$, sofern die beiden Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens für eine beliebige Zahl c existieren.
Die Ergebnisse von Aufgabe D.4 lassen es naheliegend erscheinen, dass die Wahl von c keine Rolle spielt. Beweisen Sie dies, konkret:
Es seien c und d beliebige Zahlen, und das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existiert. Dann gilt
$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx.$$



G. Aufgabe für Freaks

1. [CAS] Geben Sie ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert an, bei dem sowohl das Intervall als auch die zu integrierende Funktion unbeschränkt sind. Natürlich soll es ein anderes Integral sein als bei Aufgabe E.7.d.
2. a) Welche Arbeit muss verrichtet werden, um 1 t radioaktiven Abfall an Venus und Merkur vorbei auf die Sonne zu schiessen?
   b) Voyager 1 und Voyager 2 sind Raumsonden der NASA. Sie wurden 1977 gestartet und sollen das äussere Planetensystem und den interstellaren Raum untersuchen. Welche Arbeit muss verrichtet werden, um die rund 800 kg schwere Sonde Voyager 1 an Jupiter und Saturn vorbei in die Weite des interstellaren Raums zu bringen?