

## 30. Ergänzung: Uneigentliche Integrale

### C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Riemann'sches Integral,  
 uneigentliches Integral (f ist unbeschränkt an der Randstelle  $x=2$ ),  
 uneigentliches Integral (f ist unbeschränkt bei  $x=2$ ),  
 uneigentliches Integral (unbeschränktes Integrationsintervall),  
 uneigentliches Integral (unbeschränktes Integrationsintervall),  
 Riemann'sches Integral,  
 uneigentliches Integral (f ist unbeschränkt bei  $x=\frac{1}{2}\pi$ ).
2. a) 0.495, 49.995, 4999.995, 499'999.995, existiert nicht  
 b) 27.631, 55.262, 82.893, 110.524, existiert nicht  
 c) 10.8, 11.88, 11.988, 11.999, 12  
 d) 16.411, 21.6, 23.241, 23.76, 24  
 e) 1.379, -0.322, -0.022, 1.492, existiert nicht  
 f) 14.026, 361.517, 5'908.755, 82'104.404, existiert nicht
3. a)  $\ln b$ , existiert nicht  
 b)  $1 - \frac{1}{b}$ , 1  
 c)  $2\sqrt{b} - 2$ , existiert nicht  
 d)  $4 - \frac{4}{\sqrt[4]{b}}$ , 4  
 e)  $b \cdot \ln b - b + 1$ , existiert nicht  
 f)  $\cos 1 - \cos b$ , existiert nicht
4. a) -6.72, -798.72, -79'998.72, -7'999'998.72, existiert nicht  
 b) -14.661, -51.502, -88.343, -125.185, existiert nicht  
 c) 2.4, 3.84, 3.984, 3.998, 4  
 d) -0.42, -0.499, -0.500, -0.500, -0.5  
 e) -0.106, -0.125, -0.792, -0.226, existiert nicht  
 f) 0.018, 0.018, 0.018, 0.018, 0.018
5. a)  $3 + \frac{6}{a}$ , 3  
 b)  $2 - \frac{2}{a^2}$ , 2  
 c)  $\frac{(a+1)^2}{2a^2}$ ,  $\frac{1}{2}$   
 d)  $1 - e^a$ , 1
6. a)  $-\ln a$ , existiert nicht  
 b)  $-3 + \frac{3}{a}$ , existiert nicht  
 c)  $2 - 2\sqrt{a}$ , 2  
 d)  $\frac{4\sqrt{b} - 3\sqrt[3]{b^2} - 1}{2}$ , existiert nicht  
 e)  $-a \cdot \ln a + a - 1$ , -1  
 f)  $-\ln(\cos b)$ , existiert nicht
7. a)  $a > 5000$   
 b)  $a > 10^8$   
 c)  $a > 305.258$
8. a) Der Graph dürfte zuerst flach ansteigen, dann steil, dann wieder flach und schliesslich den Wert 100'000 annehmen.  
 b) Als Mass für die Häufigkeit, mit der die Glühbirnen zum Zeitpunkt  $t$  kaputtgehen.  
 c) 100'000, denn über kurz oder lang geht jede Glühbirne kaputt.
9. a) 254.469  
 b) existiert nicht  
 c) 0.785

### D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. a)  $\frac{1}{2}$   
 b) 2  
 c) 2
2. a)  $\frac{1}{3}$   
 b) 40.774

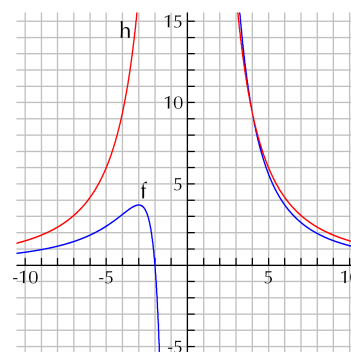
3. a) 4                                      b) existiert nicht
4. a) existiert nicht                      b) existiert nicht      c) 7.5                                      d) 6  
e) 9
5. a)  $\begin{cases} \infty, & \text{falls } 0 < r \leq 1 \\ \frac{1}{r-1}, & \text{falls } r > 1 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \infty, & \text{falls } r \geq 1 \\ \frac{1}{r-1}, & \text{falls } 0 < r < 1 \end{cases}$                                       c) existiert nicht
6.  $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$  existiert nicht, weil z. B.  $\int_0^{\infty} x dx$  nicht existiert. Hingegen ist  $\lim_{a \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-a}^a x dx}_0 = 0$ .

7. a)  $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$                       b) existiert nicht      c)  $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$

8. 1.5

9. Berührungspunkt B(3, 2)                                      a) existiert nicht      b) 2

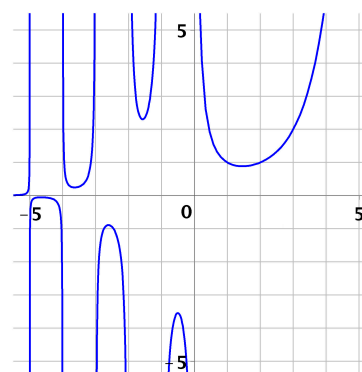
10. a) 200                                      b) 25  
c) S(4, 9.375),  $\alpha \approx 1.680^\circ$   
d) 6.25                                      e)  $\infty$   
f) Polstelle  $x=0$ ,  $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ , Nullstelle  $x=-2$ ,  
Hochpunkt H(-3, 3.704), kein Tiefpunkt,  
Wendepunkt W(-4, 3.125), Graph siehe rechts



11. a)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$                                       b) S(0, 1),  $\alpha \approx 53.130^\circ$   
c)  $a \cdot b = 1$                                       d)  $a=1, b=1$

12.  $a \approx 1.386$

13. a) 1, 1, 2, 6,  $(n-1)!$   
b) nicht definiert, 1.772, 0.886, 2.288  
c) -3.545, nicht definiert, 2.363, nicht definiert, 1.016  
d) T(1.462, 0.886)  
e) Graph siehe rechts



## E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. a) 6.283                                      b)  $\frac{\pi}{2a}$                                       c)  $\frac{\ln(2a+1)}{2a}$
2. a) 9.425                                      b) 2.197                                      c) existiert nicht
3. a) existiert nicht                                      b)  $\pi$                                       c) existiert nicht
4. a) 1.571, 1.571,  $\pi$                                       b) 2.356, 0.785,  $\pi$                                       c) 0.524, 2.618,  $\pi$
5. a)  $\pi$                                       b)  $\pi$                                       c) existiert nicht                                      d) existiert nicht  
e) 2                                      f) 10
6. a) divergent                                      b) divergent                                      c) konvergent                                      d) konvergent  
e) konvergent                                      f) divergent
7.  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  existiert genau dann, wenn die beiden „Teil-Integrale“  $\int_0^1 f(x) dx$  und  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  existieren.

a) existiert nicht: zwar ist  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ , aber  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  existiert nicht;

b) existiert nicht: zwar ist  $\int_1^{\infty} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \approx 0.215$ , aber  $\int_0^1 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$  existiert nicht;

c) existiert nicht:  $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^2} dx$  existiert nicht,  $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$  existiert auch nicht;

d)  $\pi$ , denn  $\int_0^1 \frac{2}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{2}$  und  $\int_1^{\infty} \frac{2}{(x+1)\sqrt{x}} dx = \frac{\pi}{2}$ .

## F. Anspruchsvollere Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. a) 21.766                      b) existiert nicht

2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{x^2+12} dx \approx 14.510$

3. Berührungspunkt B(4, 3); A  $\approx$  11.456

4. Wir setzen  $c < d$  voraus. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_d^b f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_d^b f(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^d f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_d^b f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^d f(x) dx + \int_d^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

