Lösungen

26. Der Weg zum bestimmten Integral

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. a) 2 b) 4 c) ≈ 13.069 d) 18.75
   e) ≈ 31.819 f) ≈ 35.819
2. a) Fahrzeug 1 ist zum Zeitpunkt t schneller unterwegs als Fahrzeug 2.
   b) Fahrzeug 1 beschleunigt zum Zeitpunkt t weniger stark als Fahrzeug 2.
   c) Fahrzeug 1 legt in den ersten 30 Sekunden denselben Weg zurück wie Fahrzeug 2.
   d) Fahrzeug 1 fährt in den ersten 30 Sekunden gleich weit wie Fahrzeug 2 zwischen Sekunde 20 und Sekunde 40.
3. a) Zu diesem Zeitpunkt t sind die beiden Fahrzeuge gleich schnell.
   b) t=6 s
4. Der Zug hat zum Zeitpunkt t_0 Verspätung $\Leftrightarrow \int_0^{t_0} v_t(t)dt < \int_0^{t_0} v_s(t)dt$.
5. $\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$ gibt an, um wie viel die Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 grösser geworden ist.
6. Als physikalische Arbeit W, welche die Physiotherapeutin erbringt.
7. Als gesamte Wassermenge, die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 an der Messstelle vorbeifliesst.
8. —
9. $28.3 \text{ m} \le s \le 36.3 \text{ m}$
10. a) $U_2 = 0.125, O_2 = 0.625; U_4 \approx 0.219, O_4 \approx 0.469$
    b) $U_2 = 0.375, O_2 = 1.875; U_4 \approx 0.656, O_4 \approx 1.406$
    c) $U_2 \approx 0.194, O_2 \approx 4.649; U_4 \approx 0.347, O_4 \approx 2.575$
    d) $U_2 \approx 353.553, O_2 \approx 853.553; U_4 \approx 518.283, O_4 \approx 768.283$
    e) $U_2 \approx 0.203, O_2 \approx 0.549; U_4 \approx 0.297, O_4 \approx 0.470$
    f) $U_2 \approx 1.368, O_2 \approx 3.718; U_4 \approx 1.812, O_4 \approx 2.987$
    g) $U_2 \approx 0.555, O_2 \approx 1.341; U_4 \approx 0.791, O_4 \approx 1.183$
    h) $U_2 \approx 0.433, O_2 \approx 0.933; U_4 \approx 0.624, O_4 \approx 0.874$
11. a) $U_{1000} \approx 0.333, O_{1000} \approx 0.334$ b) $U_{1000} \approx 0.999, O_{1000} \approx 1.002$
    c) $U_{1000} \approx 0.896, O_{1000} \approx 0.904$ d) $U_{1000} \approx 666.160, O_{1000} \approx 667.160$
    e) $U_{1000} \approx 0.386, O_{1000} \approx 0.387$ f) $U_{1000} \approx 2.348, O_{1000} \approx 2.353$
    g) $U_{1000} \approx 0.999, O_{1000} \approx 1.001$ h) $U_{1000} \approx 0.785, O_{1000} \approx 0.786$
12. $\int_0^b x^3dx = \frac{1}{4}b^4$, $\int_a^b x^3dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$

13. a) $\frac{1}{5}b^5$ und $\frac{1}{5}b^5 - \frac{1}{5}a^5$ b) $\frac{1}{6}b^6$ und $\frac{1}{6}b^6 - \frac{1}{6}a^6$

c) $\frac{1}{n+1}b^{n+1}$ und $\frac{1}{n+1}b^{n+1} - \frac{1}{n+1}a^{n+1}$ d) $e^b - 1$ und $e^b - e^a$

D. Ansprucksvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. $\int_0^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4, \int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$

Herleitung: Unterteilt man das Intervall [a, b] in n gleich breite Teilintervalle, wird $\Delta x = \frac{b}{n}$. Die Obersumme O_n für das Integral $\int_0^b x^3 dx$ ist

$$O_n = \Delta x \cdot \underbrace{\left(\Delta x^3 + (2\Delta x)^3 + (3\Delta x)^3 + \ldots + (n\Delta x)^3\right)}_{\Delta x^3 \cdot \underbrace{\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)}_{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}} = \Delta x^4 \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \frac{b^4}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{b^4}{4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{n^4}; \text{ für } n \to \infty \text{ folgt } \lim_{n\to\infty} O_n = \frac{b^4}{4}.$$

Für die Untersumme U_n gilt

$$U_n = \Delta x \cdot \underbrace{\left(0^3 + \Delta x^3 + (2\Delta x)^3 + (3\Delta x)^3 + \ldots + ((n-1)\Delta x)^3\right)}_{\Delta x^3 \cdot \underbrace{\left(0^3+1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3\right)}_{\frac{1}{4}(n-1)^2 n^2}} = \ldots = \frac{b^4}{4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{n^4};$$

für $n \to \infty$ folgt $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{b^4}{4}$.

Insgesamt ist $\int_0^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4$.

Wie bei Beispiel 26.3.2 folgt daraus $\int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$.

2. a) $U_{100} \approx 0.78010r^2, O_{100} \approx 0.79010r^2, U_{10000} \approx 0.78535r^2, O_{10000} \approx 0.78545r^2$

b) $3.12042 \le \pi \le 3.16042, 3.14139 \le \pi \le 3.14179$

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. a) 62 b) $O_2 = 84, O_3 = 88, O_4 = 75$ c) $U_2 = 24, U_3 = 48, U_4 = 45$

d) Beim Übergang von O_2 zu O_3 und von O_3 zu O_4 bleiben nicht alle Unterteilungspunkte erhalten; deshalb kann die Obersumme kleiner werden, gleich bleiben, aber auch grösser werden. Hingegen bleiben beim Übergang von O_2 zu O_4 alle Unterteilungspunkte erhalten; deshalb kann O_4 nicht grösser sein als O_2.

Dies gilt sinngemäss auch für die Untersummen U_2, U_3 und U_4.