

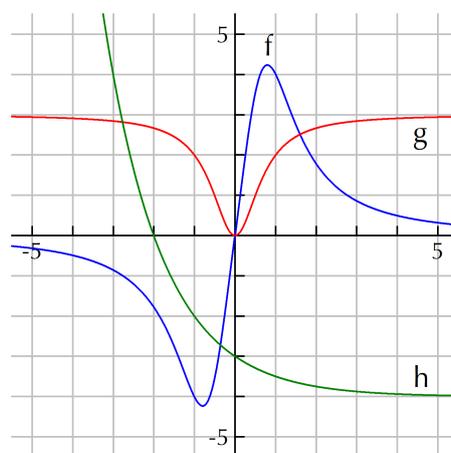
Lösungen

15. Grenzwerte bei Funktionen I

C. Aufgaben zum Grundstoff

Bemerkung: Wenn bei einer Aufgabe zwei Grenzwerte gesucht sind, bezeichnet das erste Ergebnis den Grenzwert für $x \rightarrow \infty$, das zweite den Grenzwert für $x \rightarrow -\infty$.

- | | | |
|----------------------|---------------------------|------------------------|
| a) 0 und 0 | b) 2 und -2 | c) -1 und -5 |
| 2. a) ∞ und 0 | b) ∞ und $-\infty$ | c) -2, existiert nicht |
- Mögliche Graphen sind nebeneinander dargestellt.



- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| a) ∞ und $-\infty$ | b) $-\infty$ und ∞ |
| c) 0 und 0 | d) 0 und 0 |
| e) ∞ , nicht definiert | f) 0 und ∞ |
| g) beide existieren nicht | h) 0, nicht definiert |
| i) 2 und -2 | |

- | | |
|------------------------------------|---|
| a) 3 und 3 | b) ∞ und $-\infty$ |
| c) 0 und 0 | d) $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ |
| e) $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$ | f) ∞ und $-\infty$ |
| g) 0 und 0 | h) ∞ und 0 |
| i) ∞ und 0 | j) $\frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$ und ∞ |
| k) 0 und 0 | l) ∞ , nicht definiert |
| m) 0, nicht definiert | |

- | | | |
|---------------|-------------|--------------|
| a) $\sqrt{3}$ | b) 1 | c) $-\infty$ |
| d) 2 | e) 6 | f) ∞ |
| g) ∞ | h) ∞ | i) $-\infty$ |
| j) 2 | k) 1 | l) 0 |

- Beide Funktionen, welche f einschliessen, streben für $x \rightarrow \infty$ gegen 4. Also ist auch $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$.

- | | |
|------------------------|-----------|
| a) $\frac{15t}{200+t}$ | b) 15 g/l |
|------------------------|-----------|

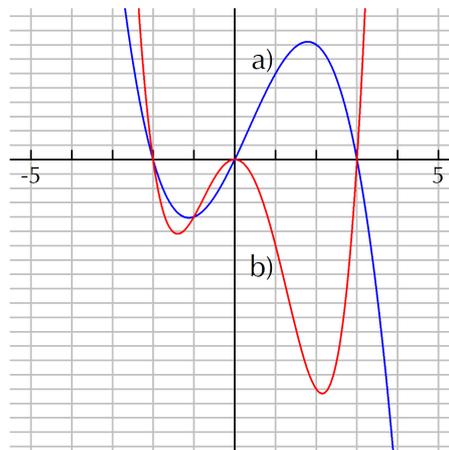
D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

- 0
- | | |
|------|------|
| a) 0 | b) 0 |
|------|------|

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \stackrel{\text{Erweitern}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)}{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{\left(x^2 + 1 \right) - x^2}^1}{\underbrace{\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)}_{\rightarrow \infty}} = 0$$

3. a) 0.13 oder 0.14 b) 0.1353 c) e^{-2}
 4. a) $N = -1666\frac{2}{3}$, $N = \frac{5}{3}m$ b) $N = -498$, $N = 2 - \frac{M}{2}$
 c) $N = -120'001$, $N = -1 - \frac{120}{\varepsilon}$ d) $N \approx -99.995$, $N = -\sqrt{\frac{10-\varepsilon}{\varepsilon}}$
 f) $N \approx -6.288$, $N = -\frac{\ln M}{\ln 3}$ i) $N = -2001$, $N = -1 - \frac{2}{\varepsilon}$

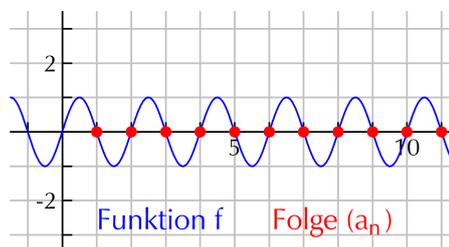
5. Die (exakten) Graphen sind nebeneinander dargestellt. Ihre Lösungen müssen nicht so exakt sein.



6. • $n=0$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a_0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a_0$
 • $n > 0$ gerade, $a_n > 0$:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 $n > 0$ gerade, $a_n < 0$:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 • $n > 0$ ungerade, $a_n > 0$:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $n > 0$ ungerade, $a_n < 0$:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

E. Anspruchsvollere Aufgabe zum Ergänzungsstoff

1. „ \Rightarrow “ Diese Aussage ist falsch.
 Zum Beispiel ist $(a_n) = (\sin(\pi \cdot n))$ die konstante Folge 0, 0, 0, 0, ...; ihr Grenzwert ist also 0.
 Die Funktion $f: x \mapsto \sin(\pi \cdot x)$ hingegen hat keinen Grenzwert.



„ \Leftarrow “ Diese Aussage ist richtig.
 Anschaulich: Wenn der Graph einer Funktion f für $x \rightarrow \infty$ auf eine Zahl a zustrebt, muss das auch der Graph der Folge (a_n) tun, weil alle seine Punkte auf dem Graphen von f liegen.

Beweis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

\Leftrightarrow Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl N , sodass für alle $x > N$ gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$.

\Rightarrow Für dieselben Zahlen ε und N gilt für $n > N$: $|\underbrace{f(n)}_{=a_n} - a| < \varepsilon$.

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

