13. Reihen

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. a) 4 b) ∞ c) 1.8
   d) 100 e) $-2\frac{7}{9} \approx -2.778$ f) –1'000'000
2. a) $\frac{2}{9}$ b) ∞ c) –1.25
   d) $-\frac{5}{6} \approx -0.833$ e) 1.5 f) $-\frac{27}{68} \approx -0.397$
3. a) 3b b) $\frac{1}{1-a}$ c) $\frac{1}{1+a}$
   d) $\frac{1}{1-c^3}$ e) $\frac{1}{1-\frac{1}{d}} = \frac{d}{d-1}$ f) $\frac{f}{1-\frac{1}{g}} = \frac{fg}{g-1}$
4. a) $a_1 = 8,\ a_2 = 6$ b) $a_1 = -14,\ s = -10$ c) $a_1 = 4.5,\ a_2 = 3.15$
5. a) $a_1 = 35$ b) $a_1 = 85$
6. a) $q = 0.5$ b) $q = -0.25$ c) $q = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$
7. a) $\frac{2}{9}$ b) $\frac{26}{111}$ c) $\frac{116}{495}$
   d) $\frac{271'801}{99'990}$ e) 1 f) $\frac{87}{100}$
8. a) geometrische Folge b) $a = 0$ c) $s = 1600$
9. a) arithmetische Folge b) $a = -\infty$ c) $s = -\infty$
10. a) arithmetische Folge b) $a = \infty$ c) $s = \infty$
11. a) geometrische Folge b) $a = \infty$ c) $s = \infty$
12. a) geometrische Folge b) $a = 0$ c) $s = 1$
13. a) sonstige Folge b) $a = 0$ c) $s = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$
14. a) 81 b) 0.00907
15. a) $n \geq 29$ b) 54 m c) 19.85 s
16. a) $G \cdot q$ b) $G \cdot q^2$ c) $G \cdot q^n$
    d) $G \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ e) $\frac{G}{1-q}$ f) $\begin{cases} \text{CHF } 150'000'000 \text{ bzw.} \\ \text{CHF } 60'000'000 \end{cases}$
17. a) $-2 < y < 2$ b) $-\frac{1}{4} < y < \frac{1}{4}$ c) $2 < y < 4$
    d) $-1 < y < 1$ e) $-1 < y < 1$ f) $5 < y < 9$

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. 2 Lösungen: $s = 54\ \left(q = \frac{1}{3}\right),\ s = 27\ \left(q = -\frac{1}{3}\right)$
2. 2 Lösungen: $a_3 = \frac{7}{8}\ \left(q = \frac{1}{8}\right),\ a_3 = 6\frac{1}{8}\ \left(q = \frac{7}{8}\right)$
3. 2 Lösungen: $a_1 = 125,\ a_6 = 40.96\ (q = 0.8),\ a_1 = 1125,\ a_6 = -368.64\ (q = -0.8)$
4. $a_1 = 21,\ a_2 = -8.4,\ a_3 = 3.36$
5. $n \geq 110$
6. $c = \frac{1}{3};\ \ c = -\frac{4}{3}$ ist keine Lösung, weil die Reihe dann divergiert.

7. $a_i = s_i - s_{i-1} = \frac{i-1}{i+1} - \frac{i-2}{i} = \frac{2}{i(i+1)}$; $s = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1$

8. a) $y > -1$ b) $2.5 < y < 3$ c) $0.5 < y < 2$
   d) $y \in \mathbb{R}$ e) $-1.557 < y < 1.557$ (Bogenmass) f) $-\frac{\pi}{4} < y < \frac{\pi}{4}$

9. a) a=0, s=5 b) a=0.5, Reihe diverg. c) a=0, $s = \frac{1}{e-1}$
   d) a=0, $(s_n = \ln(n+1),)$ $s = \infty$

10. a) $g(n) = d\cdot r + d\cdot r^2 + \ldots + d\cdot r^n = d\cdot r\frac{1-r^n}{1-r}$ b) $g = \frac{d\cdot r}{1-r} = \frac{d\cdot(1-q)}{1-(1-q)} = \frac{d\cdot(1-q)}{q}$

11. $\frac{t^2-t}{2t-1}$

Aus der Geometrie

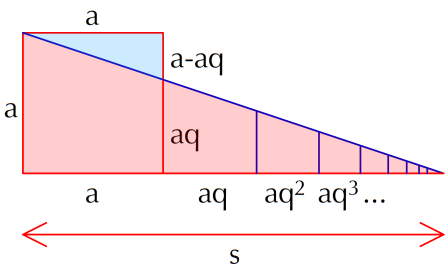
12. a) 136.57 cm b) 200 cm^2

13. a) 34.14 cm b) 1546.92 cm^3

14. Das rote und das blaue Dreieck sind ähnlich zueinander. Deshalb gilt:

    $s : a = a : (a - aq) \Leftrightarrow s(a - aq) = a^2$

    $\Leftrightarrow sa(1-q) = a^2 \Leftrightarrow s(1-q) = a \Leftrightarrow s = \frac{a}{1-q}$ ■



15. a) 157.08 cm b) $P\left(11\frac{1}{9}, 0\right)$

16. a) 81 b) P(18.69, 12.46)

17. A=94.806 cm^2

18. a) 512 cm^2 b) 218.51 cm c) 402.12 cm^2
    d) 171.62 cm

19. a) $2a^2$ b) $\frac{4a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 13.66a$ c) $\frac{\pi}{2}\cdot a^2 \approx 1.57a^2$
    d) $\frac{\pi\cdot a}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 10.73a$

20. a) 5072.13 cm^3 b) 2304 cm^2 c) 2655.76 cm^3
    d) 1206.37 cm^2

21. a) $\frac{a^3}{1-\frac{1}{\sqrt{3}^3}} \approx 1.238a^3$ b) $9a^2$ c) $\frac{\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^3}{1-\frac{1}{\sqrt{3}^3}} \approx 0.648a^3$
    d) $\frac{3}{2}\pi\cdot a^2 \approx 4{,}712a^2$

22. a) $\frac{6a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 44.785a$ b) $6a^2\sqrt{3} \approx 10.392a^2$

23. a) $U_n = 3a\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$
    b) $A_1 = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_1 + A_1\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \ldots\right) = 1.6A_1 = a^2\frac{2\sqrt{3}}{5}$

E. Aufgaben zum Ergänzungsstoff

1. a) $A = \dfrac{1}{(1-r)^2}$ b) $B = \dfrac{s}{(1+s)^2}$

2. a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} -\frac{1}{2i} = -\tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\substack{\text{harmon.}\\ \text{Reihe}}} = -\tfrac{1}{2} \cdot \infty = -\infty.$

   b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1} > \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i} = \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\substack{\text{harmon.}\\ \text{Reihe}}} = \tfrac{1}{2} \cdot \infty = \infty.$

3. Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: die harmonische Reihe.

4. Die Teilsummenfolge wächst streng monoton, weil alle $a_i > 0$ sind. Sie ist auch beschränkt, weil alle ihre Glieder kleiner als 1000 sind. Deshalb muss die Teilsummenfolge konvergieren.

5. a) $s_1 = \tfrac{1}{2}, s_2 = \tfrac{5}{6}, s_3 = \tfrac{23}{24}, s_4 = \tfrac{119}{120}$

   b) $s_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$

   c) IV: $n=1$: $s_1 = \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{2!}$ ✓ Ivo: $s_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ IB : $s_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)!}$

   BdI: $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \dfrac{(n+2)}{(n+2)!} + \dfrac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+2)!}$

   ■

   d) $s = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)!}\right) = 1$