2. Funktionen – ein erster Überblick

2.1 Überblick

- Was ist eine Funktion? „Funktion“ ist ein ganz zentraler Begriff der Mathematik. Eine Funktion im mathematischen Sinn beschreibt die Beziehung zwischen zwei Grössen. „Grösse A ist eine Funktion von Grösse B.“ bedeutet: „Grösse A hängt von Grösse B ab.“ oder „Grösse A wird von Grösse B beeinflusst.“
  Diese allgemeine, noch vage Umschreibung werden wir anhand einiger Beispiele veranschaulichen. Anschliessend untersuchen wir einige Grundeigenschaften von Funktionen.
- Den Begriff „Funktion“ trifft man auch in der Alltagssprache an – allerdings mit etwas anderer Bedeutung. Dort bezeichnet eine Funktion oft ein Amt, eine Aufgabe („in ihrer Funktion als Präsidentin …“) oder einen Zweck („die Funktion dieses Bauteils ist …“).

2.2 Beispiele für Funktionen

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit einigen mathematischen Funktionen. Anhand von Beispielen untersuchen wir, wie die Beziehung (oder die Abhängigkeit) zwischen zwei Grössen aussehen kann und wie man sie beschreiben kann.

2.2.1 Beispiel
Die Beziehung zwischen dem Alter eines bestimmten Studenten und seiner Körpergrösse

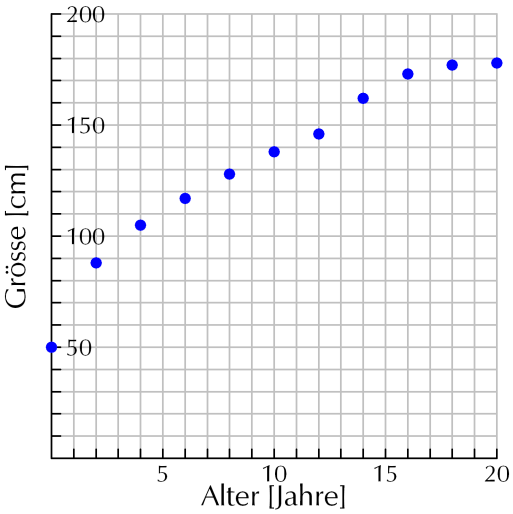
Wie gross ist ein Kind oder Teenager? Ein 4-jähriger Kindergartenschüler misst ca. 100 cm, ein 10-jähriger Primarschüler ca. 140 cm, ein 18-jähriger Maturand vielleicht knapp 180 cm … Die Körpergrösse eines Menschen ist offensichtlich abhängig von seinem Alter; grundsätzlich gilt: Je älter jemand ist, desto grösser ist er oder sie. In der mathematischen Fachsprache heisst das: „Die Körpergrösse eines Menschen ist eine Funktion des Alters einer gewissen Person.“ Damit sagen wir, dass eine Beziehung zwischen dem Alter einer Person und ihrer Körpergrösse besteht.
Für viele praktische Anwendungen reicht bei diesem Beispiel die Aussage „je älter, desto grösser“, für manche muss sie verfeinert werden. Man könnte zusätzlich berücksichtigen, dass viele Menschen nach Abschluss des körperlichen Wachstums praktisch gleich gross bleiben und erst im Alter wieder etwas kleiner werden; dann wäre die Aussage „je älter, desto grösser“ nicht mehr richtig. Aber für unseren Studenten ist das noch Zukunftsmusik.
Am einfachsten ist es, die Beziehung zwischen dem Alter des untersuchten Studenten, das wir mit x bezeichnen wollen, und der Körpergrösse, die wir mit y bezeichnen, mithilfe einer Tabelle, der *Wertetabelle,* zu beschreiben:

Alter x [Jahre]	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Grösse y [cm]	50	88	105	117	128	138	146	162	173	177	178

Diese Beziehung kann auch grafisch dargestellt werden. In jedem Alter x hat der Student eine bestimmte Grösse y. Die Zahlen x und y fasst man als Koordinaten (x, y) eines Punktes auf und trägt die so entstandenen Punkte in einem Koordinatensystem ein.

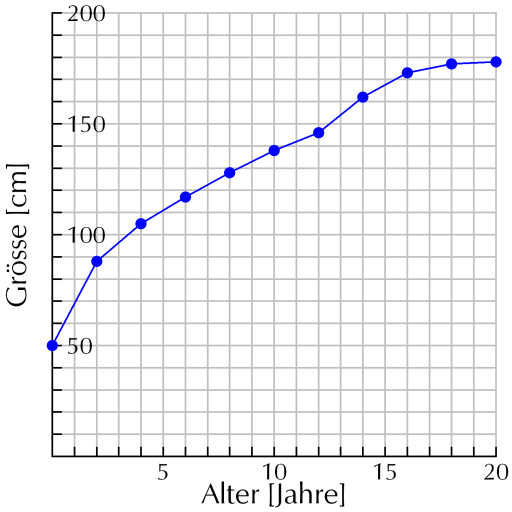
© Pythagoras Lehrmittel

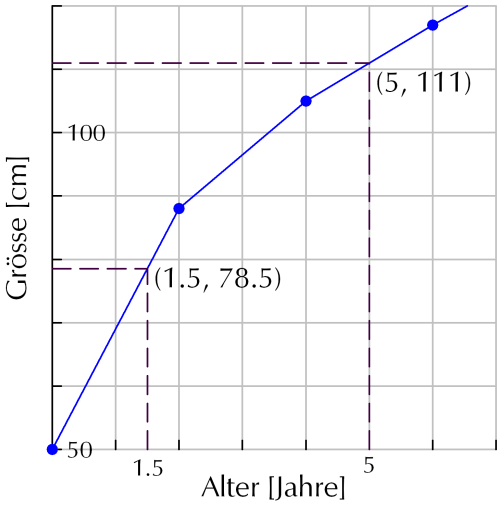
Jede Spalte der Wertetabelle liefert einen Punkt. Wir erhalten der Reihe nach die Punkte (0, 50), (2, 88), (4, 105), …, (20, 178). So entsteht das Punktemuster rechts. Dieses Punktemuster ist der *Graph* der Beziehung zwischen dem Alter x und der Grösse y. Er enthält dieselben Informationen wie die Wertetabelle.



Leider sind diese Informationen lückenhaft: Wie gross war der Student im Alter von 1½ Jahren oder von 5 Jahren? Um diese Lücken zu schliessen, verwendet man üblicherweise eine der beiden folgenden Möglichkeiten:

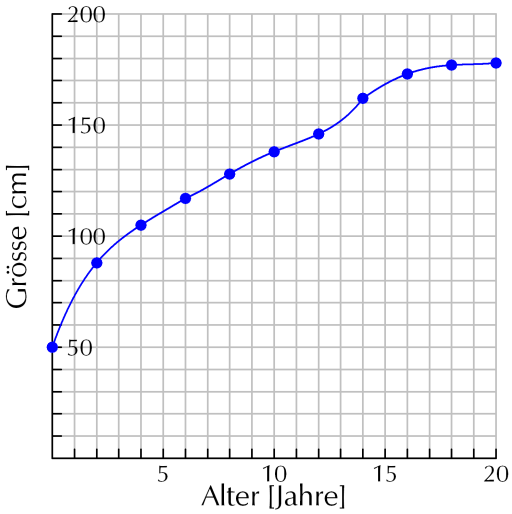
1. Man verbindet die eingezeichneten Punkte durch gerade Strecken (siehe unten). Natürlich hat man keine Gewähr, dass der Körper zwischen den bekannten Punkten genau so wächst. Aber immerhin kann man so die Frage „Wie gross war der Student im Alter x?“ für jedes Alter zwischen 0 und 20 Jahren abschätzen.

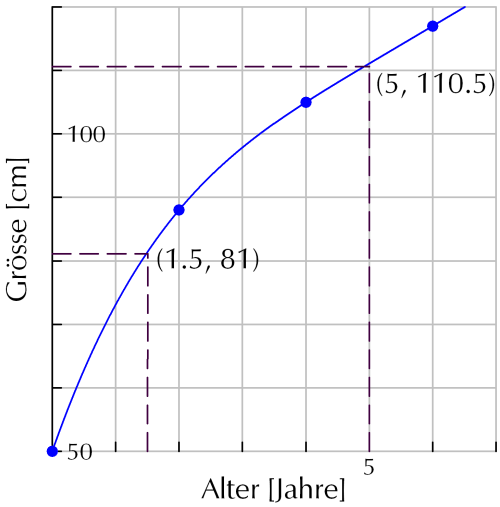




Um die Körpergrösse im Alter von 1½ bzw. 5 Jahren besser abschätzen zu können, ist rechts der entsprechende Ausschnitt des Graphen vergrössert dargestellt. Wir lesen ab: Im Alter von 1.5 Jahren misst der Knabe ca. 78.5 cm, im Alter von 5 Jahren ca. 111 cm.

2. Der oben dargestellte Streckenzug weist Knicke auf. Das dürfte die Wirklichkeit nicht gut widerspiegeln. Deshalb verbinden wir die eingezeichneten Punkte durch eine „gebogene“ Linie – in der Hoffnung, dass sie das tatsächliche Wachstum besser beschreibt.





Die neue Verbindungslinie führt zu neuen Grössenangaben: Der 1½-jährige Knabe ist nun 81 cm gross, der 5-jährige 110.5 cm.
Die Frage, welches nun jeweils die bessere Angabe ist, kann nicht beantwortet werden. Bekannt und damit gesichert sind wirklich nur die durch die markierten Punkte dargestellten Werte; zwischen diesen Punkten liegende Werte können wir nur schätzen (bzw. mehr oder weniger gut erraten).

Weshalb handelt es sich bei dieser Beziehung um eine Funktion? Das wesentliche Kennzeichen einer Funktion ist, dass jedem Alter x genau eine Körpergrösse y zugeordnet wird. Es ist nicht möglich, dass ein bestimmter Mensch in einem bestimmten Alter keine Körpergrösse hat. Oder dass ein bestimmter Mensch zu einem bestimmten Augenblick (gleichzeitig!) zwei verschiedene Körpergrössen hat.

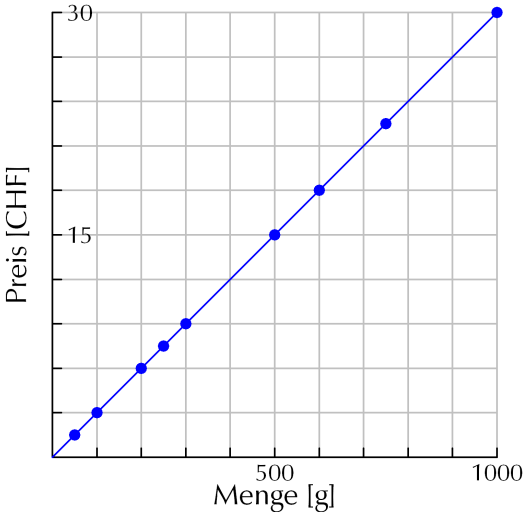
♦

2.2.2 Beispiel

Kauf von Süssigkeiten: Die Beziehung zwischen der gekauften Menge und dem Preis

Wie teuer sind Süssigkeiten? Der zu bezahlende Preis hängt von der gekauften Menge ab: „Der zu bezahlende Preis ist eine Funktion der gekauften Menge.“ Wir nehmen an, dass pro 100 g einer bestimmten Bonbonsorte CHF 3.00 zu bezahlen sind; Mengenrabatt gibt es keinen. Mit dieser Angabe können wir folgende Wertetabelle erstellen.

Menge m [g]	50	100	200	250	300	500	600	750	1000
Preis p [CHF]	1.50	3.00	6.00	7.50	9.00	15.00	18.00	22.50	30.00



Die Mengenangaben in der ersten Zeile sind frei gewählt; sinnvollerweise treten natürlich die von Kundinnen und Kunden gerade besonders häufig gewünschten Mengen auf. Wenn die Menge einmal gewählt ist, ist der Preis eindeutig festgelegt.
Wenn man die zur Tabelle gehörenden Punkte im Diagramm einträgt, erkennt man, dass alle Punkte auf einem Strahl (einer Halbgeraden) liegen. Genauer: Wenn man zu jeder theoretisch möglichen Menge (z. B. m=378.2 g) den Preis (theoretisch p=CHF 11.346) berechnet und diesen Punkt im Diagramm einträgt, dann bilden alle diese Punkte den blauen, von O(0, 0) ausgehenden Strahl. Dies ist der Graph der Beziehung zwischen der gekauften Menge m und dem zu bezahlenden Preis p.
Diese Beziehung stellt eine mathematische Funktion dar, weil zu jeder Menge m genau ein Preis p gehört. Es ist nicht möglich, dass eine bestimmte Menge keinen Preis hat oder dass eine bestimmte Menge (gleichzeitig!) mehr als einen Preis hat.
Diese Funktion beschreibt eine *direkte Proportionalität*. Bei einer direkten Proportionalität ist der Graph der Funktion stets ein Strahl oder eine Gerade, die durch O(0, 0) verläuft.

♦

2.2.3 Beispiel

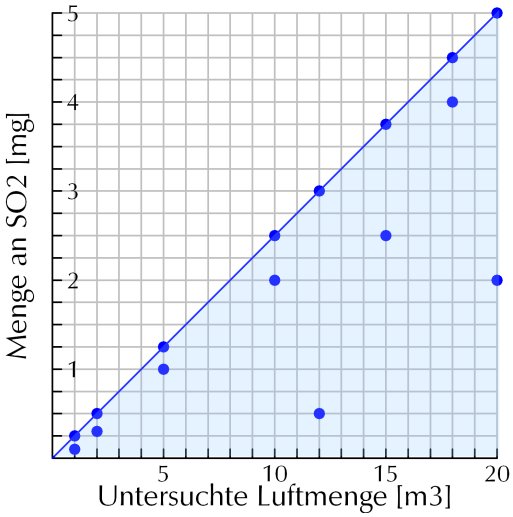
Luftverschmutzung durch Schwefeldioxid SO_2

Wie viel Schwefeldioxid SO_2 darf in der Luft enthalten sein, damit sie noch als „sauber“ gilt? Das hängt davon ab, wie gross die untersuchte Luftmenge ist. In 10 m^3 Luft darf natürlich mehr SO_2 enthalten sein als in 3 m^3 Luft.

© Pythagoras Lehrmittel

Gemäss Gesetz darf 1 m^3 Luft höchstens 0.25 g SO_2 enthalten, um noch als sauber zu gelten. Das bedeutet, dass 1 m^3 Luft auch weniger SO_2, z. B. 0.10 g enthalten darf. Deshalb sind in der folgenden Wertetabelle zu jeder Luftmenge zwei Werte angegeben: zuerst die maximal zulässige SO_2-Menge s, darunter irgendein anderer zulässiger Wert für s.

Luftmenge m [m^3]	1	2	5	10	12	15	18	20
Maximal zulässige Menge SO_2 s [g]	0.25	0.50	1.25	2.50	3.00	3.75	4.50	5.00
Tatsächlich gemessene Menge SO_2 s [g]	0.10	0.30	1.00	2.00	0.50	2.50	4.00	2.00



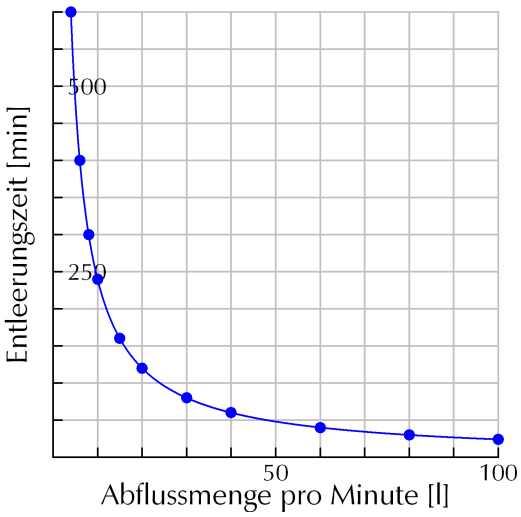
- Im Punktediagramm erkennt man, dass diejenigen Punkte (m, s), die mit den jeweils *maximal zulässigen* Mengen s gebildet wurden, einen Strahl bilden. Die anderen Punkte liegen im blauen Bereich zwischen diesem Strahl und der horizontalen Achse, wo s=0 ist.
  Zu jeder untersuchten Luftmenge m gibt es genau eine *maximal zulässige* SO_2-Menge s. Also liegt eine Funktion vor. Ihr Graph ist der schräg nach oben verlaufende Strahl.
- Aber: Zu jeder untersuchten Luftmenge m gibt es unendlich viele *zulässige* SO_2-Mengen s, im Fall von m=5 m^3 Luft jede beliebige SO_2-Menge s zwischen 0 und 1.25 g! Wenn man einer untersuchten Luftmenge m *alle* zulässigen SO_2-Mengen s zuordnet, wird einem einzigen m nicht nur ein s, sondern es werden ihm gleich unendlich viele s zugeordnet. Dann liegt *keine* Funktion vor! Der „Graph“ ist in diesem Fall keine Linie mehr, sondern der blaue Bereich.

♦

2.2.4 Beispiel
Entleerung eines Brunnens

Ein Brunnen enthält 2’400 Liter Wasser. Wie lange dauert es, bis der Brunnen leer ist? Die Entleerungszeit t hängt davon ab, welche Wassermenge a pro Minute abfliessen kann.

Abflussmenge a pro Minute [l/min]	4	6	8	10	15	20	30	40	60	80	100
Entleerungszeit t [min]	600	400	300	240	160	120	80	60	40	30	24



Die Entleerungszeit t ist eine Funktion der Abflussmenge a, die pro Minute abfliesst, denn zu jeder Abflussmenge a (a>0) gehört genau eine Entleerungszeit t.
Wenn man die Angaben der Wertetabelle als Punkte in einem Koordinatensystem einträgt, liegen die Punkte nicht auf einer Geraden, sondern auf einer „gebogenen“ Linie, einer *Hyperbel*. Hyperbeln werden wir später untersuchen.
Diese Funktion beschreibt eine *indirekte Proportionalität*. Bei einer indirekten Proportionalität ist der Graph der Funktion stets eine Hyperbel.

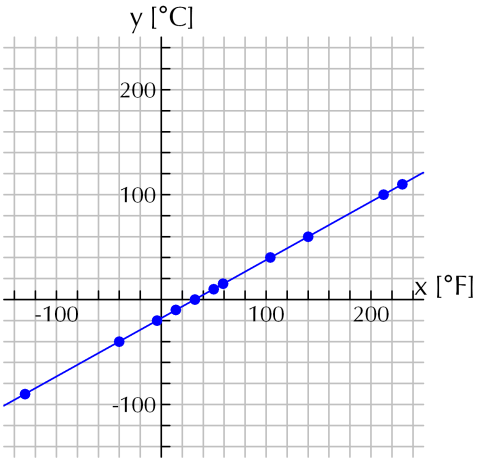
♦

2.2.5 Beispiel
Temperaturumrechnung

Im englischen Sprachraum werden die Temperaturen in Grad Fahrenheit (° F) gemessen, hierzulande in Grad Celsius (° C). Die Beziehung zwischen x° F und y° C ist eine Funktion, denn jeder Temperatur x in ° F entspricht genau eine Temperatur y in ° C.
32° F entsprechen 0° C, und 212° F sind dieselbe Temperatur wie 100° C. Eine Zunahme bzw. Abnahme um 180° F ist also dasselbe wie eine Zunahme bzw. Abnahme um 100° C. Daraus folgt weiter: Eine Zu- bzw. Abnahme um 18° F ist dasselbe wie eine Zu- bzw. Abnahme um 10° C, eine Zu- bzw. Abnahme von 1° F ist dasselbe wie eine Zu- bzw. Abnahme von $\frac{5}{9}$° C usw. Die Wertetabelle wurde so errechnet.

Temperatur x [° F]	–130	–40	–4	14	32	50	59	104	140	212	230
Temperatur y [° C]	–90	–40	–20	–10	0	10	15	40	60	100	110

Die Punkte liegen wieder auf einer Geraden, welche diesmal nicht durch den Punkt O(0, 0) verläuft. Zudem treten bei diesem Beispiel nicht ausschliesslich positive x- und y-Werte auf, sondern auch negative.



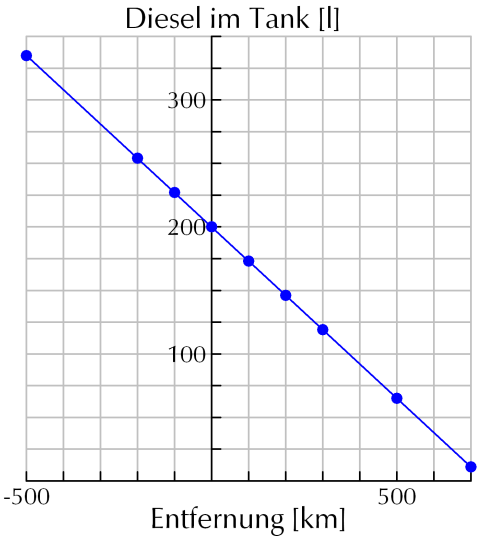
♦

2.2.6 Beispiel
Entleerung eines Dieseltanks

Ein Car verbraucht pro 100 km Fahrdistanz 27 Liter Diesel. Derzeit befinden sich 200 Liter Diesel im Tank. Damit kann man, solange nicht getankt wird, für jede von nun an zurückgelegte Entfernung e die Menge des noch im Tank vorhandenen Diesels d berechnen.

Entfernung e [km]	–500	–200	–100	0	100	200	300	500	700
Tankinhalt d [l]	335	254	227	200	173	146	119	65	11

Mit diesen Angaben kann man nicht nur in die Zukunft rechnen, sondern auch in die Vergangenheit. Als der Car noch 100 km vom jetzigen Punkt entfernt *war* (e=–100 km), *enthielt* der Tank noch 27 Liter Diesel mehr als jetzt, also d=227 Liter. So betrachtet sind in diesem Beispiel auch negative Entfernungen sinnvoll.
Die durch die Wertetabelle bestimmten Punkte liegen auf einer Geraden.
Auch diese Beziehung zwischen e und d ist eine Funktion, weil jeder Entfernung e genau ein Tankinhalt d zugeordnet wird. Es ist nicht möglich, dass der Tank an ein und derselben Stelle zwei verschiedene Mengen Diesel enthält.



♦

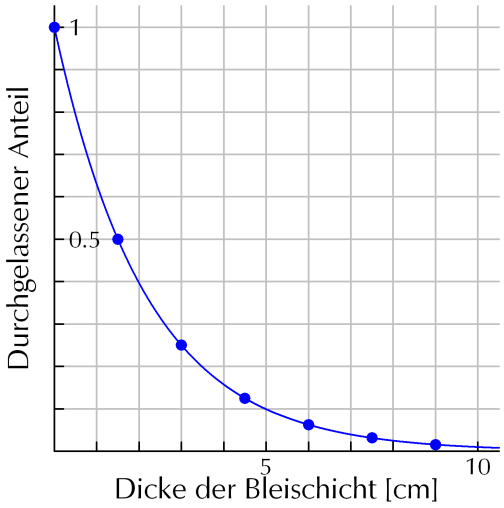
© Pythagoras Lehrmittel

2.2.7 Beispiel
Schutz vor radioaktiver Strahlung

Beim radioaktiven Zerfall von Atomen werden Gammastrahlen ausgesandt. Bleiwände bieten einen gewissen Schutz vor den Wirkungen dieser Strahlen. Eine Bleiplatte von ca. 1.5 cm Dicke schluckt die Hälfte der ursprünglichen Gammastrahlung und lässt nur die andere Hälfte durch; eine 3 cm dicke Bleischicht (entspricht 2 Platten zu 1.5 cm Dicke) lässt nur noch einen Viertel durch, eine 4.5 cm dicke Bleischicht (= 3 Platten zu 1.5 cm Dicke) noch einen Achtel usw.
Wir untersuchen die Beziehung zwischen der Dicke d der Bleischicht und dem Anteil a der noch durchgelassenen Gammastrahlung.

Dicke d der Bleischicht [cm]	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9
Durchgelassener Anteil a	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

Wieder liegt eine Funktion vor, genauer: eine *Exponentialfunktion*. Auch diese werden wir später noch untersuchen. Der Graph dieser speziellen Exponentialfunktion ist nebenan abgebildet.
Der Graph dieser Funktion scheint auf den ersten Blick auch eine Hyperbel zu sein (→ 2.2.4). Dem ist aber *nicht* so: Wenn man sich auf der x-Achse von rechts her auf den Punkt O(0, 0) zubewegt, wachsen bei der *Hyperbel* die y-Werte über alle Grenzen an. Bei der hier vorliegenden *Exponentialfunktion* dagegen wachsen die y-Werte nur bis auf 1 an; dieser Graph ist somit *keine* Hyperbel.



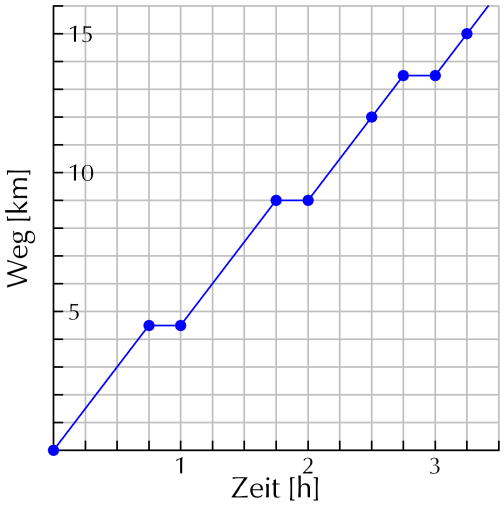
♦

2.2.8 Beispiel
Wanderung

Ein Berggänger wandert pro Stunde jeweils 45 Minuten und legt dann 15 Minuten Pause ein. Die Wandergeschwindigkeit liegt bei 6 km/h. Wir untersuchen die Beziehung zwischen der Zeit t (gemessen in Stunden seit dem Beginn der Wanderung) und dem insgesamt zurückgelegten Weg s (gemessen in Kilometern vom Startpunkt der Wanderung aus).

Zeit t [h]	0	0.75	1	1.75	2	2.5	2.75	3	3.25
Weg s [km]	0	4.5	4.5	9	9	12	13.5	13.5	15

Bei dieser Beziehung liegt wieder eine Funktion vor. Zu jedem Zeitpunkt t muss sich der Berggänger an genau einem Ort befinden. Es ist nicht möglich, dass er sich irgendwann nirgendwo befindet oder irgendwann an zwei verschiedenen Orten.



♦

2.3 Die Bestandteile einer Funktion

In den Beispielen des letzten Abschnitts haben wir einige Funktionen untersucht. In diesem Abschnitt filtern wir das Gemeinsame aus diesen Beispielen heraus.
Zu einer Beschreibung einer Funktion f gehören mehrere Bestandteile. Wir zeigen dies am Beispiel der Funktion f, die jeder Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zuordnet.

Funktionsname → $f: x \mapsto x^2$ ← Funktionswert x^2, abhängige Variable

Argument, unabhängige Variable

Oft hat die zugeordnete Quadratzahl einen Namen – vielleicht y. Dann schreibt man

Funktionsname → $f: x \mapsto y$ ← Funktionswert y, abhängige Variable

Argument, unabhängige Variable

Gelegentlich verwendet man auch die Schreibweise für eine beliebige Funktion f:

Funktionsname → $f: x \mapsto f(x)$ ← Funktionswert f(x), abhängige Variable

Argument, unabhängige Variable

Der Doppelpunkt nach dem Funktionsnamen hat nichts mit einer Division zu tun.
Wir studieren in diesem Abschnitt die einzelnen Bestandteile dieses Schemas.

2.3.1 Definitionen

Eine Funktion f ordnet einer Zahl x genau eine Zahl y zu.

(1) Die Zahl x heisst *Argument*[1] *von f*.
(2) Die zugeordnete Zahl y heisst *Funktionswert von x* und wird mit *f(x)* (in Worten: „f von x“) bezeichnet. Andere Bezeichnung: *Bild von x unter f*.
(3) Wenn man speziell ausdrücken will, dass y von x abhängt (und nicht umgekehrt x von y), bezeichnet man x als *unabhängige Variable* und y als *abhängige Variable*.

2.3.2 Beispiel

Beim Beispiel 2.2.1 wird einer Person mit Alter x ihre Körpergrösse y zugeordnet.

(1) Was ist das Argument, was der Funktionswert?
(2) Welches ist die abhängige Variable, welches die unabhängige Variable?
(3) Wie schreibt man, dass ein Neugeborenes 50 cm gross ist? Dass ein zweijähriges Kind 88 cm gross ist? Dass ein Zwanzigjähriger 178 cm gross ist?

(1) Das Alter x ist das Argument, die Körpergrösse y (oder eben f(x)) der Funktionswert.
(2) Weil die Körpergrösse y vom Alter x abhängt, ist die Körpergrösse y die *abhängige Variable*, das Alter x die *unabhängige Variable*.
(3) $f(0)=50$, $f(2)=88$, $f(20)=178$.

♦

[1] argumentum (lateinisch): Ausgangspunkt, Merkmal, Kennzeichen, aber auch Beweismittel, Begründung. „Argument“ bedeutet hier „Ausgangspunkt“, im Alltag hingegen oft „Begründung“.

© Pythagoras Lehrmittel

2.3.3 Umschreibungen

(1) Die *Funktionsvorschrift* gibt an, wie jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet wird.

(2) Wird die Funktionsvorschrift als Gleichung angegeben, z. B. $y=f(x)$, so nennt man diese Gleichung eine *Funktionsgleichung*.

Eine Funktionsvorschrift kann auf verschiedene Arten ausgedrückt werden:

- Beim Beispiel „Körpergrösse“ 2.2.1 wird die Funktionsvorschrift durch die Tabelle angegeben.
- Manchmal wird die Funktionsvorschrift in Worten umschrieben – etwa beim Beispiel „Wanderung“ 2.2.8: „Ein Berggänger wandert pro Stunde jeweils 45 Minuten und legt dann 15 Minuten Pause ein. Die Wandergeschwindigkeit liegt bei 6 km/h.“
- Oft wird die Funktionsvorschrift mithilfe einer Formel kurz und prägnant ausgedrückt: $f\colon x \mapsto y$ bedeutet, dass die Funktion f der Zahl x die Zahl y zuordnet; $f\colon x \mapsto 0.03x$ bedeutet, dass die Funktion f der Zahl x die Zahl $y=0.03x$ zuordnet.
  Die Gleichungen $y=0.03x$ und $f(x)=0.03x$ sind zwei Funktionsgleichungen von f.
  Leider kann nicht jede Funktionsvorschrift, nicht jede Funktionsgleichung mit einer einfachen Formel ausgedrückt werden.

Die Form der Funktionsvorschrift spielt keine Rolle. Entscheidend ist nur, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet wird.

2.3.4 Beispiele

(1) Welches ist die Funktionsvorschrift, welches die Funktionsgleichung bei denjenigen Beispielen von Abschnitt 2.2, bei denen eine Funktion vorliegt?

(2) Wie findet man die Formel, welche die jeweilige Funktionsvorschrift ausdrückt?

(1)

Beispiel	Funktionsvorschrift	Funktionsgleichung
Körpergrösse	Die Funktionsvorschrift liegt als Tabelle vor. Es gibt keine einfache Formel.	
Süssigkeiten	$p\colon m \mapsto 0.03\cdot m$ Wir verzichten mit dieser Formel darauf, den Preis auf ein Vielfaches von CHF 0.05 oder CHF 0.10 zu runden.	$p(m)=0.03\cdot m$ Diese Funktionsgleichung beschreibt eine *direkte Proportionalität*.
Brunnen	$t\colon a \mapsto \frac{2'400}{a}$	$t(a) = \frac{2'400}{a}$ Diese Funktionsgleichung beschreibt eine *indirekte Proportionalität*.
Temperatur	$y\colon x \mapsto \frac{5}{9}(x-32)$	$y(x)= \frac{5}{9}(x-32)$
Dieseltank	$d\colon e \mapsto 200-\frac{27}{100}e$	$d(e)= 200-\frac{27}{100}e$
Radioaktivität	$a\colon d \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{1.5}}$	$a(d)= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{1.5}}$
Wanderung	Die Funktionsvorschrift liegt als Text vor. Es gibt keine einfache Formel.	

(2)
- *Süssigkeiten:* Eine Portion von 100 g kostet CHF 3.00. Wir rechnen deshalb eine vorgegebene Süssigkeitenmenge m in Portionen zu 100 g um. Das geschieht, indem wir m durch 100 teilen: Aus $m=500$ g werden dadurch $\frac{m}{100}=5$ Portionen. Weil jede Portion CHF 3.00 kostet, multiplizieren wie die Portionenzahl mit 3:

$$m \mapsto \underbrace{\frac{m}{100}}_{\text{Portionen}} \cdot 3 = m\cdot\frac{3}{100} = 0.03\cdot m\,.$$

- *Brunnen:* Der Brunnen enthält 2'400 Liter. Wenn pro Minute a Liter abfliessen, dauert die Entleerung $\frac{2'400}{a}$ Minuten:
$$a \mapsto \frac{2400}{a}.$$
- *Temperatur:* 32 °F entsprechen 0° C, und 212° F entsprechen 100° C. Wir haben gesehen, dass eine Zunahme bzw. Abnahme von 1° F dasselbe ist wie eine Zunahme bzw. Abnahme von $\frac{5}{9}$° C. Die Umrechnung von x° F in y° C erfolgt in zwei Schritten:
1. Verkleinere x um 32. Das garantiert, dass 32° F dasselbe sind wie 0° C.
2. Multipliziere dieses Resultat mit $\frac{5}{9}$.
Die folgende Tabelle zeigt diese beiden Rechenschritte:

Temperatur x [° F]	–130	–40	–4	14	32	50	59	104	140	212
x–32	–162	–72	–36	–18	0	18	27	72	108	180
Temperatur y [° C]	–90	–40	–20	–10	0	10	15	40	60	100

Insgesamt erhält man so die Funktionsvorschrift
$$x \mapsto \frac{5}{9}(x-32).$$
- *Dieseltank:* Der Tank enthält zu Beginn 200 Liter Diesel. Auf jeder Etappe von 100 km werden 27 Liter verbraucht. Wir rechnen zunächst die zurückgelegte Entfernung e in Etappen von 100 km um: Aus e km werden
$$\frac{e}{100} \text{ Etappen.}$$
Der Verbrauch dafür beträgt
$$\frac{e}{100} \cdot 27 \text{ Liter,}$$
und im Tank verbleiben
$$200 - \underbrace{\frac{e}{100}}_{\text{Etappen}} \cdot 27 \text{ Liter.}$$
Ergebnis:
$$e \mapsto 200 - e \cdot \frac{27}{100}.$$
- *Radioaktivität:* Wir stellen uns vor, uns stünden Bleiplatten von je 1.5 cm Dicke zur Verfügung. Eine Platte lässt $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen Strahlung durch, 2 Platten lassen nur noch $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ der ursprünglichen Strahlung durch, 3 Platten noch $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ usw.; n Platten lassen also noch $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ durch.
Bei diesem Beispiel geht man aber nicht von der Zahl der Platten aus, sondern von der Dicke d der Bleischicht. Man muss deshalb zunächst die Dicke d in Platten n umrechnen. Weil eine Platte 1.5 cm dick ist, geschieht dies nach der Formel
$$n = \frac{d}{1.5}.$$
Fasst man beide Formeln zusammen, folgt: Hat die Bleischicht die Dicke d, geht noch $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{1.5}}$ der ursprünglichen Strahlung durch:
$$d \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{1.5}}.$$
Die Algebra lehrt, dass der Ausdruck $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d}{1.5}}$ auch dann berechnet werden kann, wenn d kein ganzzahliges Vielfaches von 1.5 cm ist.

♦

© Pythagoras Lehrmittel

Eine wichtige Veranschaulichung einer Funktion ist ihr Graph. Die Punkte P(x, y) auf dem Graphen der Funktion f werden bestimmt, indem man zu vorgegebenem x den zugehörigen Funktionswert f(x) angibt und als y-Wert von P verwendet. Man kann also sagen:

2.3.5 Definition

Der *Graph einer Funktion f* ist die Menge aller Punkte $P(x_P, y_P)$, welche folgende Bedingungen erfüllen:

(1) x_P ist ein Argument von f.

(2) y_P ist der zu x_P gehörige Funktionswert, d. h. $y_P = f(x_P)$.

2.3.6 Zusammenfassung

Eine Funktion – insbesondere ihre Funktionsvorschrift – kann auf 4 Arten beschrieben werden: in Worten, durch eine Wertetabelle, durch ihren Graphen, durch eine Formel oder Funktionsgleichung.

2.4 Wann liegt ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion?

Die Bedingungen von Definition 2.3.5 charakterisieren *besondere Punkte* $P(x_P, y_P)$, nämlich die auf dem Graphen einer Funktion f:

(1) x_P ist ein Argument von f.

(2) y_P ist der zu x_P gehörige Funktionswert, d. h. $y_P = f(x_P)$.

Um abzuklären, ob der *beliebige Punkt* $P(x_P, y_P)$ auf dem Graphen einer bestimmten Funktion f liegt, überprüfen wir deshalb gemäss (2), ob der tatsächliche y-Wert y_P und der „Sollwert" $f(x_P)$ übereinstimmen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, liegt P auf dem Graphen von f, sonst nicht.

2.4.1 Beispiel

Beim Beispiel 2.2.2 „Süssigkeiten" ist $p: m \mapsto 0.03m$. Ändern wir die Bezeichnungen, wird daraus $f: x \mapsto 0.03x$.

(1) Liegt der Punkt P(600, 20) auf dem Graphen von f?

(2) Liegt der Punkt Q(800, 24) auf dem Graphen von f?

(3) Liegt der Punkt R(300, 6) auf dem Graphen von f?

(1) Es ist

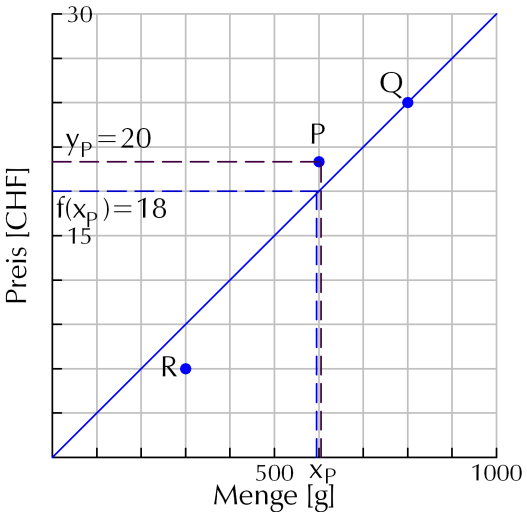
$$f(x_P) = f(600) = 0.03 \cdot 600 = 18,$$

aber

$$y_P = 20.$$

Damit P(600, 20) auf dem Graphen von f liegt, muss der tatsächliche Wert von y_P (hier: 20) übereinstimmen mit dem „Sollwert" $f(x_P)$ (hier: 18). Das ist aber nicht der Fall, folglich liegt P nicht auf dem Graphen von f.

Wir können sogar präziser sagen: Weil y_P *grösser* ist als der „Sollwert" $f(x_P)$, liegt der Punkt P *oberhalb* des Graphen von f.



(2) Es ist einerseits

$$f(x_Q)=f(800)=0.03\cdot 800=24 \text{ („Sollwert“)},$$

anderseits

$$y_Q=24 \text{ („tatsächlicher y-Wert“)}.$$

Weil diese beiden Werte *übereinstimmen*, liegt Q *auf* dem Graphen von f.

(3) Es ist

$$f(x_R)=f(300)=0.03\cdot 300=9 \text{ („Sollwert“)},$$

aber

$$y_R=6 \text{ („tatsächlicher y-Wert“)}.$$

Also ist $y_R \neq f(x_R)$, und R liegt nicht auf dem Graphen von f. Weil y_R *kleiner* ist als der „Sollwert“ $f(x_R)$, liegt R *unterhalb* des Graphen von f.

♦

Wir verallgemeinern:

2.4.2 Satz

Es sei f eine Funktion, und $P(x_P,\ y_P)$ sei ein beliebiger Punkt. Dann gilt:

$$\text{P liegt genau dann } \left\{\begin{array}{l}\text{... unterhalb des ...}\\ \text{... auf dem ...}\\ \text{... oberhalb des ...}\end{array}\right\} \text{ Graphen von f, wenn gilt: } \left\{\begin{array}{l}\text{... } y_P < f(x_P).\\ \text{... } y_P = f(x_P).\\ \text{... } y_P > f(x_P).\end{array}\right\}$$

Beweis:

- Gemäss Definition 2.3.5 ist der Graph von f die Menge aller Punkte der Bauart $(x_P,\ f(x_P))$. Deshalb liegt der Punkt $P(x_P,\ y_P)$ mit x-Koordinate x_P genau dann *auf dem Graphen von f*, wenn seine (tatsächliche) y-Koordinate y_P mit (dem „Sollwert“) $f(x_P)$ *zusammenfällt*, d.h., wenn $y_P=f(x_P)$ gilt.
- Wenn die y-Koordinate y_P von P *kleiner* ist als $f(x_P)$ – also $y_P<f(x_P)$, liegt der Punkt $P(x_P,\ y_P)$ *unterhalb des Graphen von f*.
- Und wenn die y-Koordinate y_P von P *grösser* ist als $f(x_P)$ – also $y_P>f(x_P)$, liegt der Punkt $P(x_P,\ y_P)$ *oberhalb des Graphen von f*.

■

2.5 Ergänzung: Weitere Beispiele für Funktionen

In diesem Abschnitt behandeln wir spezielle Beispiele zum Funktionsbegriff, etwa solche mit bemerkenswerten Graphen.

2.5.1 Beispiel

Die Lösungen der Gleichung $x^2=a$

Wir betrachten a als vorgegeben und suchen x. Für a=4 entsteht die Gleichung $x^2=4$ mit den beiden Lösungen $x_1=-2$ und $x_2=+2$, kurz: $x=\pm 2$. Ebenso erhalten wir:

Vorgegebene Zahl a	–4	–2	–1	0	0.25	1	2	4	4.84
Lösung(en) x	keine Lösung			0	±0.5	±1	$\pm\sqrt{2}$	±2	±2.2

Es zeigt sich, dass die Gleichung …

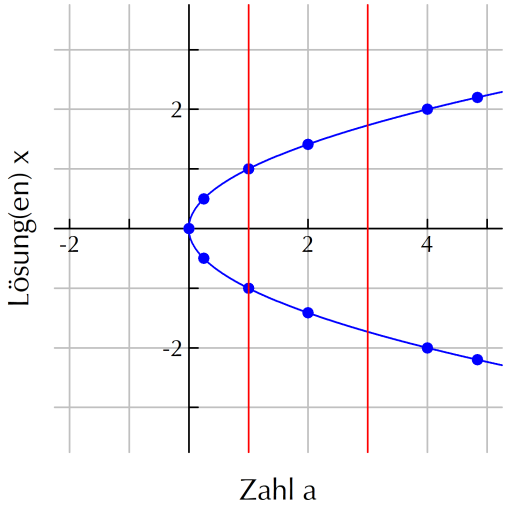
… für positive Zahlen a stets zwei Lösungen,

… für a=0 als einzige Lösung x=0 und

… für negative Werte von a keine Lösung hat.

© Pythagoras Lehrmittel

Die Beziehung zwischen a und x kann *keine* Funktion sein, weil es *nicht* zu jedem Wert von a *genau eine* Lösung x gibt.
Rechts ist auf der waagrechten Achse a eingezeichnet, auf der senkrechten Achse x. Obwohl sich alle Punkte auf einer „gebogenen Linie" befinden, handelt es sich *nicht* um den Graphen einer *Funktion*. Dies erkennt man daran, dass es senkrechte Geraden gibt, welche die „gebogene Linie" in mehr als einem Punkt schneiden.
Übrigens: Die „gebogene" Linie ist eine *Parabel*. Parabeln werden wir später untersuchen.



2.5.2 Beispiel
Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^2=a$

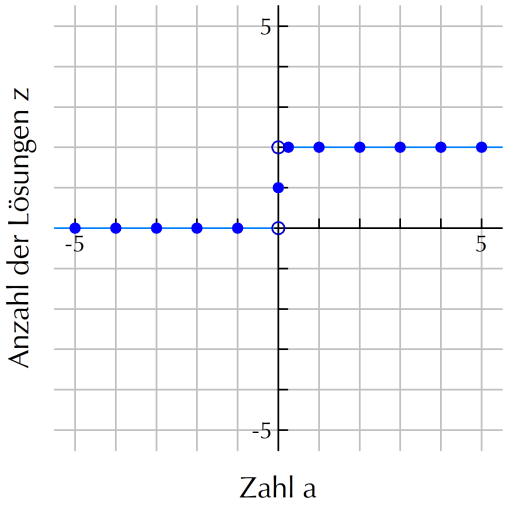
Wir wandeln das letzte Beispiel etwas ab. Wieder untersuchen wir die Gleichung $x^2=a$. Nun fragen wir aber nach der *Anzahl* ihrer Lösungen.

Vorgegebene Zahl a	–4	–2	–1	0	0.25	1	2	4	4.84
Lösung(en) x	keine Lösung			0	±0.5	±1	$\pm\sqrt{2}$	±2	±2.2
Anzahl der Lösungen z	0	0	0	1	2	2	2	2	2

Wir haben schon gesehen, dass für die Anzahl der Lösungen gilt

$$z = \begin{cases} 2, \text{ falls } a > 0 \text{ ist,} \\ 1, \text{ falls } a = 0 \text{ ist,} \\ 0, \text{ falls } a < 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

Jeder Zahl a wird genau eine der drei Zahlen 2, 1 oder 0 zugeordnet: Es liegt eine Funktion vor.
Bemerkenswert an diesem Graphen ist, dass sich der z-Wert zweimal sprunghaft ändert: Zunächst springt der z-Wert von 0 auf 1, dann von 1 auf 2. Der Graph ist also keine zusammenhängende Linie.
Um die Situation für a=0 zu verdeutlichen, sind zwei leere Kreise eingezeichnet. Die so markierten Punkte (0, 0) und (0, 2) gehören gerade nicht mehr zum Graphen dieser Funktion. ♦



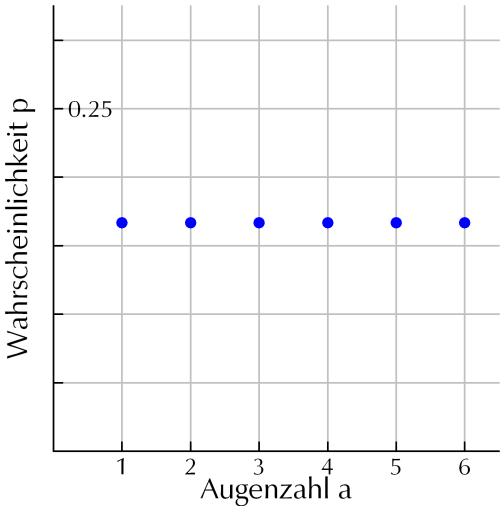
2.5.3 Beispiel
Würfeln

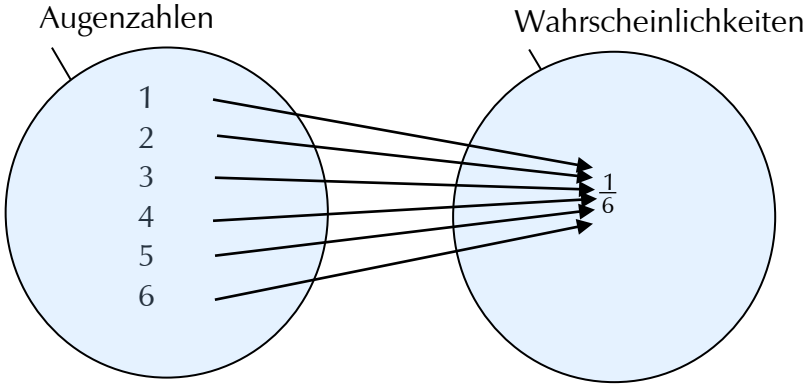
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem ungefälschten Würfel eine 1 zu würfeln? Eine 2? Eine 3 usw.? Die Antwort ist stets $\frac{1}{6}$.

Gewürfelte Augenzahl a	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Jeder Augenzahl a wird genau eine Wahrscheinlichkeit p zugeordnet – zwar immer dieselbe, aber das spielt keine Rolle. Daher liegt hier eine Funktion vor.

Der Graph dieser Funktion besteht aus nur 6 Punkten, weil als Augenzahl nur die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 in Frage kommen.
Es wäre falsch, die 6 Punkte durch eine Gerade miteinander zu verbinden. Dies würde bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit, zum Beispiel 2.5 oder π zu würfeln, ebenfalls $\frac{1}{6}$ ist. Das stimmt aber nicht: 2.5 und π sind unmöglich.
Ab und zu verwendet man zur Illustration einer Funktion auch ein Mengen- oder Pfeildiagramm: In der einen Menge fasst man die Augenzahlen zusammen, in der anderen die möglichen Wahrscheinlichkeiten.





Von jeder Augenzahl a aus führt ein Pfeil auf diejenige Wahrscheinlichkeit p, welche der Augenzahl a entspricht.

♦

2.5.4 Beispiel
Welches ist die Funktionsvorschrift bei den Beispielen in Abschnitt 2.5?

Beispiel 2.5.1: ist keine Funktion,

Beispiel 2.5.2: $f: a \mapsto \begin{cases} 2, \text{ falls } a > 0 \text{ ist,} \\ 1, \text{ falls } a = 0 \text{ ist,} \\ 0, \text{ falls } a < 0 \text{ ist,} \end{cases}$

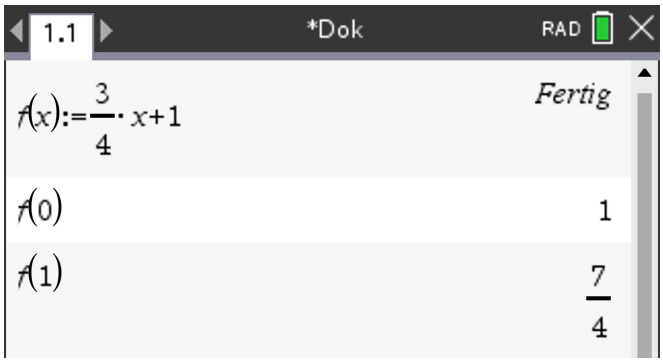
Beispiel 2.5.3: $f: a \mapsto \frac{1}{6}$.

♦

2.6 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

2.6.1 Beispiel
a) Definieren Sie auf dem Taschenrechner die Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{4}x + 1$.
b) Berechnen Sie anschliessend die Funktionswerte f(0) und f(1).

a) f(x):=3/4*x+1 Enter
b) f(0) Enter
f(1) Enter



© Pythagoras Lehrmittel

Falls das Ergebnis als Dezimalzahl dargestellt werden soll, fügen Sie einen Dezimalpunkt hinzu.
f(1.) Enter

2.7 Übungen

A. Fragen zum Grundstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

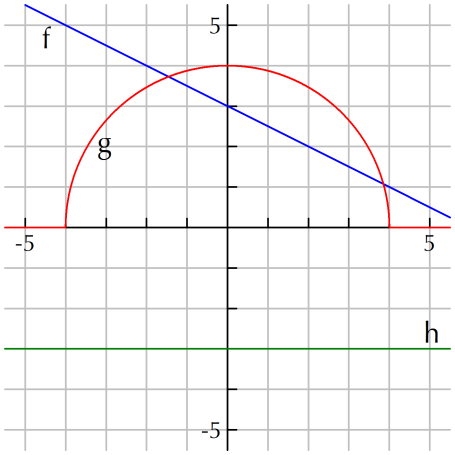
1. Welches sind die Bestandteile einer Funktion? Geben Sie ein Beispiel.
2. Wie kann man eine Funktion beschreiben?
3. Woran erkennt man, ob eine Linie den Graphen eine Funktion darstellt oder nicht?
4. Wann beschreibt eine Funktion eine direkte Proportionalität?
5. Wann liegt ein Punkt P auf dem Graphen der Funktion f? Wann liegt P oberhalb des Graphen?

B. Aufgaben zum Grundstoff

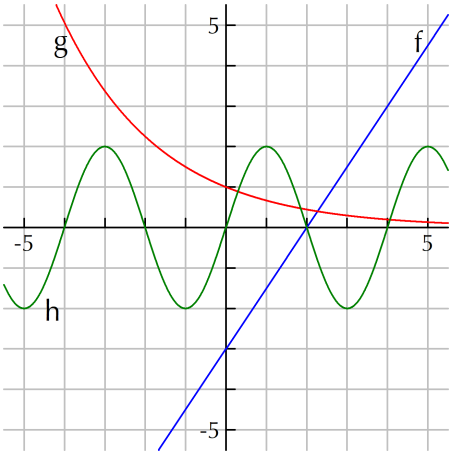
Grundlegendes über Funktionen

1. a) Ist bei einem Quadrat die Fläche A eine Funktion der Seitenlänge s?
   b) Ist bei einem Quadrat die Seitenlänge s einer Funktion der Fläche A?
   c) Ist bei einem Würfel die Oberfläche S eine Funktion der Länge D der Raumdiagonalen?
   d) Ist bei einem Würfel die Länge D der Raumdiagonalen eine Funktion der Oberfläche S?
   e) Ist die Körpertemperatur T einer bestimmten Patientin eine Funktion der Zeit t?
   f) Ist die Zeit t eine Funktion der Körpertemperatur T eines bestimmten Patienten?
2. Die Funktion p gibt zu jeder natürlichen Zahl n an, wie viele Primzahlen kleiner oder gleich n sind. Die ersten paar Primzahlen sind 2, 3, 5, 7, … Also ist p(1)=0, p(2)=1, p(3)=2, p(4)=2, p(5)=3, p(6)=3 usw.
   a) Bestimmen Sie p(10), p(15) und p(20).
   b) Drücken Sie mithilfe von p aus: Die 644’999-te Primzahl ist 10’006’721.
3. Welche der folgenden Linien stellen den Graphen einer Funktion dar? Begründen Sie!

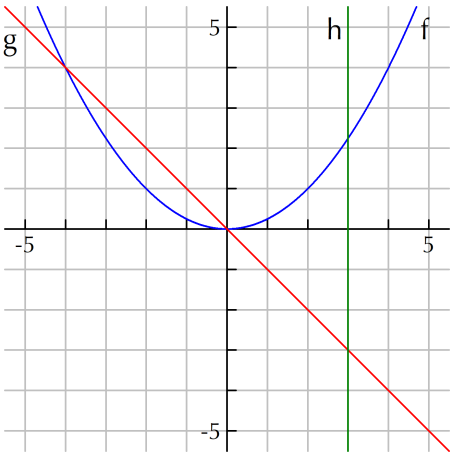
a)



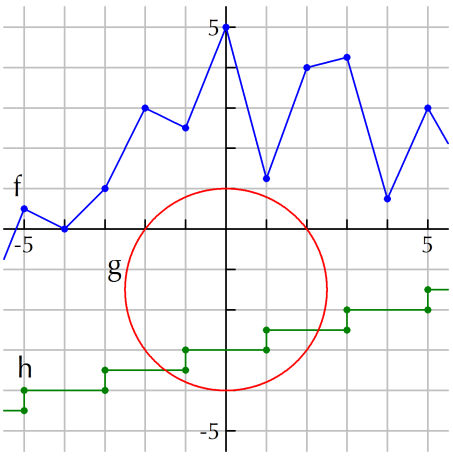
b)



c)



d)



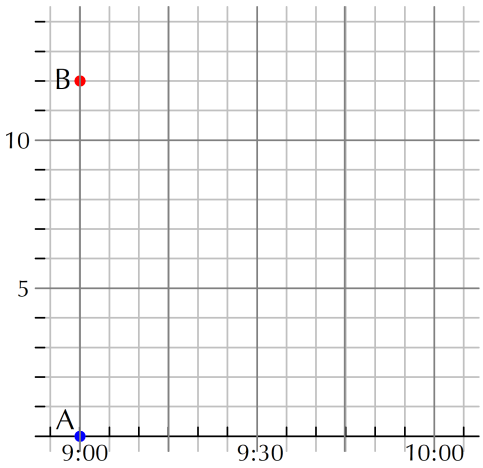
4. Lesen Sie bei den angegebenen Bildern von Aufgabe B.3. ab:
   a) B.3.a) f(–2), g(4), g(5), h(0), h(1)
   b) B.3.b) f(2), f(4), g(0), h(–5), h(–2)
   c) B.3.c) f(–4), f(2), g(–4), g(3), h(3)
   d) B.3.d) f(3), g(2), h(–4), h(0), h(3)
5. Lesen Sie bei den Bildern in Aufgabe B.3. ab:
   a) Für welche Werte von x ist bei B.3.a) f(x)=5, g(x)=4, h(x)=–3, h(x)=–4?
   b) Für welche Werte von x ist bei B.3.b) f(x)=–3, g(x)=1, h(x)=0, f(x)=h(x)?
   c) Für welche Werte von x ist bei B.3.c) f(x)=1, g(x)=1, f(x)=g(x), f(x)≤g(x)?

Graphen von Funktionen zeichnen

6. Erstellen Sie für die Funktion f eine Wertetabelle, und stellen Sie ihren Graphen dar.
   - Wählen Sie selber einen Bereich für die x-Werte; oft kann x auch negativ sein.
   - Den Bereich, in dem y liegen kann, entnehmen Sie Ihrer Wertetabelle.
   - Wählen Sie beim Koordinatensystem die Einteilungen auf der x- und y-Achse so, dass der Graph eine sinnvolle Grösse erhält.

   a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$ b) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x+2$ c) $f: x \mapsto -3$

   d) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$ e) $f: x \mapsto \sqrt{x}$ f) $f: x \mapsto |1.5x-3|$
7. Was für ein Viereck schliessen die Graphen der folgenden Funktionen ein? Bei Bedarf dürfen Sie Seitenlängen und Winkel messen.
   a) $f: x \mapsto -4,\ g: x \mapsto -2x+6,\ h: x \mapsto 2x+4,\ i: x \mapsto 2$
   b) $f: x \mapsto 4-0.8x,\ g: x \mapsto 4+1.25x,\ h: x \mapsto -4-0.8x,\ i: x \mapsto -3+1.25x$
8. Während eines Fussballspiels kommt es zu einem Freistoss. Der Ball, dessen Flugbahn durch die Funktion $h: x \mapsto -0.005x^2+0.2x$ beschrieben wird, überfliegt die Torlinie in 2.00 m Höhe. Aus welcher Distanz zum Tor wurde der Freistoss ausgeführt?
9. Die Freunde Alois und Bruno wohnen 12 km voneinander entfernt, Alois in A., Bruno in B. Um sich wieder einmal zu treffen, ziehen beide um 9:00 Uhr zuhause los. Alois fährt Bruno mit dem Velo entgegen und legt pro Viertelstunde 3 km zurück. Bruno spaziert Alois entgegen und legt pro halbe Stunde 2 km zurück. Wann und wo treffen sie einander?
   Lösen Sie diese Aufgabe graphisch. Auf der x-Achse ist die Uhrzeit einzutragen, auf der y-Achse der Abstand von A. in km. Die Startpunkte von Alois und Bruno sind bereits eingezeichnet.



© Pythagoras Lehrmittel

10. Erstellen Sie für die Funktionen f und g eine Wertetabelle, stellen Sie ihre Graphen in einem einzigen Koordinatensystem dar, und lesen Sie ihre Schnittpunkte ab. Beachten Sie, dass x und f(x) manchmal auch negativ sein können.
    a) $f: x \mapsto -2x+1,\ g: x \mapsto \frac{4}{3}x+11$
    b) $f: x \mapsto x+2,\ g: x \mapsto x^2-4$
    c) $f: x \mapsto x-1,\ g: x \mapsto 2|x|-4$
    d) $f: x \mapsto |x-2|,\ g: x \mapsto 4-|x|$

Lage von Punkten

11. Liegt der Punkt P auf dem Graphen von f?
    a) $f: x \mapsto 0.4x-5$, P(325, 124)
    b) $f: x \mapsto \frac{5}{3}x+4$, P(18, 34)
12. Bestimmen Sie rechnerisch, ob der Punkt auf den Graphen, oberhalb oder unterhalb der Graphen liegt.

	$f: x \mapsto x+1$	$g: x \mapsto 2x-4$	$h: x \mapsto -3$	$i: x \mapsto \frac{1}{2}x^2-2$
a) A(2, 0)				
b) B(0, –2)				
c) C(–1, –3)				
d) D(5, 6)				
e) E(π, 3)				

13. Die Punkte P(x, y) sollen auf dem Graphen der Funktion f liegen.
    a) Vervollständigen Sie die Wertetabelle der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$.

x	–3	–2				2		
y=f(x)			0	0.25	0.75		3	4

    b) Vervollständigen Sie die Wertetabelle der Funktion $g: x \mapsto \sqrt{x}-1$.

x	0					4		
y=g(x)		– 0.75	0	0.5	0.75		2	2.5

14. Die Punkte A(14, u) und B(v, –18) liegen auf dem Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{3}(-x+29)$. Berechnen Sie u und v.
15. a) Der Graph der Funktion $f: x \mapsto a \cdot x+2.5$ verläuft durch den Punkt P(5, 6). Berechnen Sie a.
    b) Der Graph der Funktion $g: x \mapsto b \cdot x^2+3$ verläuft durch den Punkt Q(4, 5). Berechnen Sie b.

Graphen von Funktionen zeichnen und die Funktionsvorschrift bestimmen

Erstellen Sie bei den Aufgaben 16. bis 26. jeweils eine Wertetabelle, und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f: x ↦ y. Geben Sie wenn möglich die Funktionsvorschrift an. Hinter der Funktionsvorschrift steckt oft eine Ihnen bekannte Formel, bei der freilich andere Bezeichnungen als x und y auftreten können. Vielleicht muss die Formel auch noch etwas umgeformt werden.

16. x = Seitenlänge eines Quadrats, y = Länge seiner Diagonalen
17. x = Länge der Diagonalen eines Quadrats, y = seine Seitenlänge
18. x = Radius eines Kreises, y = Fläche dieses Kreises
19. x = Fläche eines Kreises, y = Radius dieses Kreises
20. x = Volumen eines Würfels, y = Oberfläche des Würfels
21. x = Uhrzeit, y = Temperatur an Ihrem Wohnort an einem Sommertag

22. Ein voller Autotank enthält 60 l Benzin. Pro 100 km verbraucht das Auto 7.5 l.
    x = zurückgelegte Strecke in km, y = im Tank noch vorhandene Benzinmenge in l.
23. Teenager Theophil erwartet Elvira bei sich zuhause zum ersten Date und möchte sie unter anderem mit leckerem Alpkäse verwöhnen, von dem 100 g CHF 2.50 kosten.
    x = gekaufter Alpkäse in g, y = dafür bezahlter Preis in CHF.
24. Das Date von Elvira und Theophil beginnt um 19:00 Uhr. Wie könnte sich Theophils Puls in den zwei Stunden vor dem Date und während des Dates entwickeln? x = Uhrzeit, y = Theophils Puls.
25. Gemäss dem 2020 gültigen Posttarif bezahlt man für den Versand eines Economy-Pakets mit x kg Gewicht innerhalb der Schweiz ein bestimmtes Porto y in CHF.
    x = Gewicht des Pakets, y = zu bezahlendes Porto

Gewicht x	Porto y
$0 \le x \le 2$	7.00
$2 < x \le 10$	9.70
$10 < x \le 30$	20.50

26. a) Eine Firma bietet einen bestimmten Taschenrechner für CHF 40.00 pro Stück an. Bei gleichzeitigem Kauf einer grösseren Anzahl wird ein Rabatt entsprechend der Tabelle gewährt.
    x = Anzahl Taschenrechner [Stück],
    y = insgesamt zu bezahlender Preis [CHF]

Anzahl x	Rabatt
$10 \le x \le 24$	10 %
$25 \le x \le 49$	20 %
$x \ge 50$	25 %

    b) Wie viele Taschenrechner sollte man für eine Gruppe möglichst *nicht* kaufen?

C. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

Graphen von Funktionen zeichnen

1. Erstellen Sie für die Funktion f eine Wertetabelle, und stellen Sie ihren Graphen im Koordinatensystem dar. Beachten Sie, dass x und f(x) manchmal auch negativ sein können. Den Bereich, in dem f(x) liegen kann, entnehmen Sie Ihrer Wertetabelle.

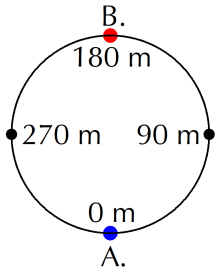
   a) $f: x \mapsto \dfrac{10}{x^2+1}$ b) $f: x \mapsto \dfrac{2x^2-2}{x^2+1}$ c) $f: x \mapsto \sqrt{|x|}$

   d) $f: x \mapsto \big||2x|-4\big|$ e) $f: x \mapsto \big|\big||x|-5\big|-2\big|$

2. Erstellen Sie für die Funktionen f und g eine Wertetabelle, stellen Sie ihre Graphen in einem einzigen Koordinatensystem dar, und lesen Sie ihre Schnittpunkte ab. Beachten Sie, dass x und f(x) manchmal auch negativ sein können.

   a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x+5),\ g: x \mapsto \sqrt{25-x^2}$ b) $f: x \mapsto x-2,\ g: x \mapsto \dfrac{8x+2}{x^2+1}$

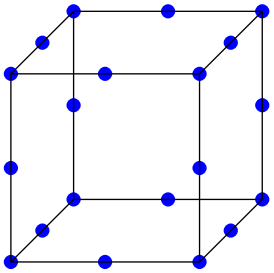
3. Stellen Sie die Graphen der folgenden Funktionen in einem einzigen Koordinatensystem dar: $f: x \mapsto \sqrt{5x-x^2},\ g: x \mapsto \sqrt{-5x-x^2},\ h: x \mapsto -\sqrt{25-5x},\ i: x \mapsto -\sqrt{25+5x}$.
   Für die Funktionen f und h ist $x \in [0, 5]$, für die Funktionen g und i ist $x \in [-5, 0]$.
4. Ein Hauseigentümer mäht seinen Rasen jeden zweiten Freitag, so auch heute. Wie entwickelt sich die Höhe h des Rasens im Verlauf der nächsten 6 Wochen ungefähr? Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f: $t \mapsto h$; t = Anzahl Tage seit dem letzten Mähen [d], h = Höhe des Rasens [cm].
5. Die Radfahrerinnen Anja und Brigitta drehen im Gegenuhrzeigersinn ihre Runden auf einer 360 m langen Bahn. Gerade jetzt ist Anja bei der Markierung 0 m, Brigitta bei der Markierung 180 m. Anja fährt stets mit 15 m/s, Brigitta mit 9 m/s. Wann und wo wird Brigitta von Anna in den nächsten 3 Minuten überholt bzw. überrundet? Lösen Sie diese Aufgabe graphisch.



© Pythagoras Lehrmittel

Graphen von Funktionen zeichnen und die Funktionsvorschrift bestimmen

6. Ein Rechteck mit den Seiten a und b hat den Umfang U=40 cm.
   a) Wie hängt seine Fläche A von a ab?
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f: $a \mapsto A$ für $a \in [0, 20]$.
7. Ein Rechteck mit den Seiten a und b hat die Fläche $A=4\ m^2$.
   a) Wie hängt sein Umfang U von a ab?
   b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f: $a \mapsto U$ für $a \in (0, 6]$.
8. a) An jeder Kante eines aus Draht gebildeten Würfels sind n=3 Kugeln befestigt (→ rechts). Wie viele Kugeln s sind am ganzen Würfel befestigt?
   b) Welche Funktion f: $n \mapsto s$ beschreibt den Zusammenhang zwischen n (Zahl der Kugeln an einer Kante) und s (Zahl der Kugeln am ganzen Würfel)?
   c) Zeichnen Sie den Graphen von f für $n \in [2, 10]$.



9. Bei einer Uhr ist der Minutenzeiger defekt, er zeigt immer auf die 12. Der Stundenzeiger hingegen funktioniert einwandfrei, sodass man dank ihm die Zeit zumindest ungefähr ablesen kann. Wie gross ist der Winkel α zwischen dem Stunden- und dem Minutenzeiger dieser Uhr zum Zeitpunkt t, wobei t in Stunden nach Mitternacht gemessen wird?
   a) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f für $t \in [0, 24]$.
   b) Beschreiben Sie f durch eine Formel.
   Beispiele: Für t=0 (Mitternacht) ist α=0°, für t=3 (3:00 Uhr) ist α=90°, für t=3.5 (3:30 Uhr) ist α=105°, und für t=8.5 (8:30 Uhr) ist ebenfalls α=105°.
10. Wie gross ist der Winkel α zwischen dem Stunden- und dem Minutenzeiger einer Uhr zum Zeitpunkt t, wobei t in Stunden nach Mitternacht gemessen wird? Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetabelle den Graphen dieser Funktion f für $t \in [0, 3]$.
    Beispiele: Für t=0 (Mitternacht) ist α=0°, für t=3 (3:00 Uhr) ist α=90°, für t=3.5 (3:30 Uhr) ist α=75°, und für t=8.5 (8:30 Uhr) ist ebenfalls α=75°.

D. Aufgaben für Freaks

1. Manche Unternehmen des öffentlichen Verkehrs stellen ihre Fahrpläne graphisch dar. Jede Zug-, Bus- oder Schiffverbindung wird durch eine Linie dargestellt, die angibt, wo sich z. B. ein Bus zu einer bestimmten Zeit befindet. Besorgen Sie sich einen graphischen Fahrplan für eine bestimmte Strecke und legen Sie ihn so vor sich hin, dass die Zeitachse waagrecht und von links nach rechts verläuft.
   a) Woran erkennt man, ob ein Zug schnell oder langsam fährt?
   b) Woran erkennt man, ob zwei Züge in dieselbe Richtung oder in entgegengesetzter Richtung fahren?
   c) Was bedeutet es, wenn sich zwei Linien schneiden?
   d) Was bedeuten waagrechte Strecken?
2. a) Was versteht man in der Betriebswirtschaftslehre unter der *Nachfragefunktion?* Welches ist ihre unabhängige Variable, welches die abhängige? Wie sieht der Graph ungefähr aus? Geben Sie ein Beispiel an.
   b) Was ist das Giffen[2]-Paradoxon? Wodurch kommt es zustande? Geben Sie ein Beispiel an.

[2] Giffen Robert, britischer Statistiker und Ökonom, 22. Juli 1837 (Strathaven, Schottland) bis 12. April 1910 (Fort Augustus, Schottland)

3. Beschreiben Sie Schritt für Schritt, wie man bei Aufgabe C.10. den Winkel α zu einer beliebigen Uhrzeit t bestimmen kann.
4. a) *Brussels Sprouts* ist ein Spiel für 2 Personen. Welches sind seine Regeln? Spielen Sie es einige Male. Zu Beginn sind n *Kreuze* vorgegeben. Wie viele Züge z dauert ein Spiel? Besteht eine formelmässige Beziehung zwischen n und z? Wenn ja: wie sieht der Graph aus? Wer gewinnt das Spiel?
   b) Auch *Sprouts* ist ein Spiel für 2 Personen. Welches sind seine Regeln? Spielen Sie es einige Male. Zu Beginn sind n *Punkte* vorgegeben. Wie viele Züge z dauert ein Spiel? Besteht eine formelmässige Beziehung zwischen n und z? Wenn ja: wie sieht der Graph aus? Wer gewinnt das Spiel?

© Pythagoras Lehrmittel