25. Opérations de base avec des vecteurs

Dans les manuels scolaires, les vecteurs sont habituellement représentés en colonne. C'est pourquoi les exemples des chapitres 25 à 30 sont presque exclusivement calculés avec des vecteurs colonnes, bien que les commandes fonctionnent également pour les vecteurs lignes.

25.1 Saisir et enregistrer un vecteur Vecteur colonne	Enregistrer le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$: [2; 3; −6] [STO▸] vectcolonne [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
Vecteur ligne	Enregistrer le vecteur (2, 3, −6): [2, 3, −6] [STO▸] vectligne [ENTER] → $[2 \quad 3 \quad -6]$ Dans les vecteurs colonnes, les composantes sont séparées par un point-virgule, dans les vecteurs lignes par une virgule.
25.2 Transposer un vecteur ligne en vecteur colonne et inversement	Transposer le vecteur ligne de 25.1 en vecteur colonne et le vecteur colonne en vecteur ligne: vectligne$^{\mathrm{T}}$ [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ vectcolonne$^{\mathrm{T}}$ [ENTER] → $[2 \quad 3 \quad -6]$ Le symbole $^{\mathrm{T}}$ est obtenu avec [2nd][MATH] 4 1 .
25.3 Donner les composantes d'un vecteur ...colonne	Quelle est la troisième composante du vecteur colonne de 25.1? vectcolonne[3, 1] [ENTER] → −6 L'appendice [3, 1] signifie: 3$^{\text{ème}}$ ligne, 1$^{\text{ère}}$ colonne
...ligne	Quelle est la troisième composante du vecteur ligne de 25.1? vectligne[1, 3] [ENTER] → −6 L'appendice [1, 3] signifie: 1$^{\text{ère}}$ ligne, 3$^{\text{ème}}$ colonne
25.4 Opérations de base avec des vecteurs Somme	Additionner les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [0; 6; −1]+[3; −6; 5] [ENTER] → $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
Différence	Soustraire le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$: [0; 6; −1]−[3; −6; 5] [ENTER] → $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$

Multiple	Doubler le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$:
	2*[0; 6; −1] [ENTER] → $\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$
Fraction	Calculer le tiers du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$:
	[3; −6; 5]/3 [ENTER] → $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$
25.5 Norme d'un vecteur	Quelle est la longueur du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$?
	norme([2; 3; −6]) [ENTER] → 7
25.6 Longueur d'un segment AB	Quelle est la distance entre les points A(3, 2, 1) et B(4, −2, 9)?
	[3; 2; 1] [STO▸] a [ENTER] → $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
	[4; −2; 9] [STO▸] b [ENTER] → $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$
	norme(b−a) [ENTER] → 9
	☝ Le recours à la commande norme dans les équations peut poser problème; → Problèmes et difficulté, n° 1 plus loin dans ce chapitre.
25.7 Transformer un vecteur en un vecteur unité	Amener le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ à la longueur unité:
	vectunit([2; 3; −6]) [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}$
25.8 Deux vecteurs ont-ils la même direction ou deux directions opposées?	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ ont-ils la même direction ou deux directions opposées?
	[3; 2; −6]./[−6; −4; 12] [ENTER] → $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$
	Les deux vecteur sont colinéaires car le vecteur-solution possède trois composantes identiques. Et

	comme la valeur est négative, les deux vecteurs ont des directions opposées. ☝ La commande ./ effectue une division composante par composante.
25.9 Décomposer un vecteur	Exprimer le vecteur $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$: **1ère méthode:** Avec équation vectorielle résol(x*[4; 0; 2] + y*[–1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [–6; 0; 0], {x, y, z}) ENTER → x=1 and y=3 and z=–1 Interprétation: $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. **2ème méthode:** Avec opération matricielle augmente(augmente(augmente([4; 0; 2], [–1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [–6; 0; 0]) STO▸ matrice ENTER → $\begin{bmatrix}4&-1&7&-6\\0&2&6&0\\2&1&5&0\end{bmatrix}$ gausjord(matrice) ENTER → $\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$ Les facteurs recherchés se trouvent dans la dernière colonne: $\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.
25.10 Déterminer si des vecteurs sont linéairement dépendants ou non	Les vecteurs $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants? Pour le savoir, on exprime le vecteur nul $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Suivant 25.9 on obtient comme *unique*

combinaison $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les vecteurs sont linéairement indépendants.

Les vecteurs $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ sont-ils linéairement dépendants?

Pour le savoir, on exprime le vecteur nul $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.

Suivant 25.9, on obtient:

1$^{\text{ère}}$ méthode:

résol(x*[4; 0; 2] + y*[1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z}) ENTER → x= –@1 and y= –3·@1 and z=@1

Comme l'indique le symbole @1, ce système d'équations a un nombre infini de solution. Ainsi les vecteurs sont linéairement dépendants.

Une combinaison possible est

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}.$$

2$^{\text{ème}}$ méthode:

augmente(augmente(augmente([4; 0; 2], [1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [0; 0; 0]) STO▸ matrice ENTER →

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 7 & 0\\0 & 2 & 6 & 0\\2 & 1 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

gausjord(matrice) ENTER → $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

Comme la dernière ligne (!) ne contient que des zéros, les trois vecteurs sont linéairement dépendants.

Problèmes et difficultés

1. Quel point P(x, y) se situe à une distance 5 de chacun des deux points A(–2, 2) et B(5, 1)?

Solution: $P_1(1, -2)$, $P_2(2, 5)$

[–2; 2] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ a $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

[5; 1] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ b $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

[x; y] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ p $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

résol(norme(p–a)=5 and norme(p–b)=5,
{x, y}) $\boxed{\text{ENTER}}$ → x=1. and y=–2.
Attention: autres solutions possibles

Seul P_1 est trouvé. Remède: Elever l'équation au carré.
résol(norme(p–a)^2=25 and norme(p–b)^2=25,
{x, y}) $\boxed{\text{ENTER}}$ → x=1 and y=–2 or x=2 and y=5
REMARQUE: poss. domaine plus grand

2.	Quel point P(x, y) se situe à la même distance r des points A(5, 7), B(–1, –1) et C(6, 0)?	Solution: P(2, 3), r=5

[5; 7] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ a $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

[–1; –1] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ b $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

[6; 0] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ c $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

[x; y] $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ p $\boxed{\text{ENTER}}$ → $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

résol(norme(p–a)=r and norme(p–b)=r and
norme(p–c)=r, {x, y, r}) $\boxed{\text{ENTER}}$ → $r=\sqrt{y^2+16.}$ and x=2. and y=3.
Attention: autres solutions possibles

Pour quelle raison r n'est-il pas calculé jusqu'au bout? Curieusement, tout fonctionne à merveille lorsque la distance est désignée par la lettre d:
résol(norme(p–a)=d and norme(p–b)=d and
norme(p–c)=d, {x, y, d}) $\boxed{\text{ENTER}}$ → x=2. and y=3. and d=5.
Attention: autres solutions possibles