14. Suites, séries et limites	
14.1 Définir une suite Définition explicite Définition récursive	Définir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n=2n+1$: 2*n+1 STO▸ a(n) ENTER → Fait Définir une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n = \begin{cases} 3, & \text{si } n=1 \\ b_{n-1}+2, & \text{sinon} \end{cases}$: when(n=1, 3, b(n–1)+2) STO▸ b(n) ENTER →Fait Condition Le terme b_n sera calculé de cette façon, si n remplit la condition. Le terme b_n sera calculé de cette façon si n ne remplit pas la condition.
14.2 Calculer un terme d'une suite préalablement définie un terme plusieurs termes	Calculer le 7ème terme de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: a(7)ENTER → 15 Calculer les termes numéro 3 à 6 de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: **1ère méthode:** a(n) | n={3, 4, 5, 6} ENTER → {7 9 11 13} **2ème méthode:** suite(a(i), i, 3, 6) ENTER → {7 9 11 13} ☝ Avec une définition récursive, la première méthode conduit souvent à Erreur: Mémoire.
14.3 Définir une suite et en calculer quelques termes	Calculer les termes numéro 3 à 7 de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n=2n+1$: suite(2*n+1, n, 3, 7) ENTER → {7 9 11 13 15}
14.4 Additionner quelques termes ou un nombre infini de termes d'une suite $\sum_{i=1}^{n} a_i$	Calculer la somme des termes de la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_i=2i+1$, pour i allant de 1 à n: Σ(a(i),i,1,n) ENTER → $n^2+2\cdot n$ Le symbole Σ s'obtient au moyen des touches 2nd[Σ] sur la Voyage 200 et des touches F3 4 sur la TI-89 Titanium. Additionner l'ensemble des termes de la suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $c_i=\frac{1}{2^i}$: Σ(1/(2 ^ i), i, 1, ∞) ENTER → 1 Le symbole ∞ se trouve au-dessus la touche J sur la Voyage 200 et au-dessus de la touche CATALOG sur la TI-89 Titanium.

14.5 Multiplier quelques termes ou un nombre infini de termes d'une suite

$$\prod_{i=1}^{n} a_i$$

Multiplier les termes de la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_i=2*i+1$, pour i allant de 3 à 8:

Π(a(i), i, 3, 8) [ENTER] → 2297295

Le symbole Π s'obtient avec les touches [F3] 5 .

Multiplier l'ensemble des termes de la suite $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $c_i=\frac{1}{2^i}$:

Π(1/2 ^ i, i, 1, ∞) [ENTER] → 0

14.6 Etablir le tableau des valeurs d'une ou plusieurs suite(s)

Construire le tableau des valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n=\frac{n^2}{2}-n$ et de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive avec $v_n=\begin{cases}1, \text{ si } n=1\\ v_{n-1}+n, \text{ sinon}\end{cases}$:

1ère méthode (aussi valable pour plusieurs suites):

Préparation

Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des suites: [MODE]

Graph ... 4: SUITE [ENTER] (ne doit pas être effectué chaque fois).

Définir la ou les suite(s)

Pas 2: Définir et sélectionner les suites

[♦][Y=]

D'éventuelles suites existantes, précédemment définies peuvent être effacées avec [F1] 8 [ENTER]

Introduire la suite définie de façon explicite:

u1(n)=n ^ 2/2–n [ENTER]

ui1= ne rien donner

Introduire la suite définie de façon récursive:

u2(n)=u2(n–1)+n [ENTER]

ui2=1 [ENTER]

Les suites dont l'équation est précédée d'un ✓ seront calculées. Le symbole ✓ peut être apposé, resp. effacé à l'aide de la touche ⊕ resp. [F4].

Déclarer les valeurs de n qui devront apparaître dans le tableau

Pas 3: Indiquer les valeurs de n désirées

[♦][TblSet]

DébutTbl: 1 ⌄

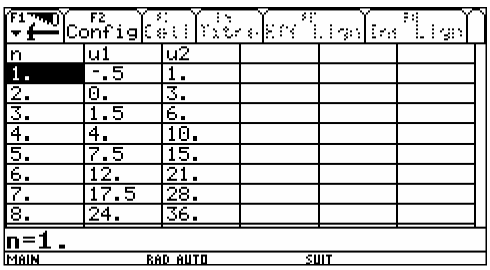
Δtbl: 1 [ENTER] [ENTER]

(Ces données ne doivent pas être introduites chaque fois).

Calculer le tableau

Pas 4: Calculer et afficher le tableau

[♦][TABLE] →



n	u1	u2
1.	-.5	1.
2.	0.	3.
3.	1.5	6.
4.	4.	10.
5.	7.5	15.
6.	12.	21.
7.	17.5	28.
8.	24.	36.

n=1.

MAIN RAD AUTO SUIT

Les valeurs suivantes sont obtenues avec ⊕.
Les valeurs de n peuvent être modifiées avec [F2] comme décrit au pas 3.

Retour à l'écran Home

Voyage 200: [♦][HOME]
TI-89 Titanium: [HOME]

$2^{\text{ème}}$ méthode:

Calculer quelques termes de la suite $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:

Préparation

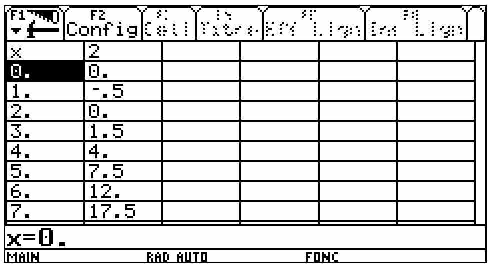
Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des fonctions (!)
[MODE] Graph ... 1: FONCTION [ENTER] (ne doit pas être effectué chaque fois).

Déclarer les valeurs de n qui devront apparaître dans le tableau

Pas 2: Indiquer les valeurs de n désirées
[♦][TblSet]
DébutTbl: 0 ⊙
Δtbl: 1 [ENTER] [ENTER]
(Ces données ne sont pas toujours nécessaires).

Calculer le tableau

Pas 3: Produire le tableau
table n ^ 2/2–n, n [ENTER] →



x	2
0.	0.
1.	-.5
2.	0.
3.	1.5
4.	4.
5.	7.5
6.	12.
7.	17.5

x=0.

Les valeurs suivantes sont obtenues avec ⊕.
Les valeurs de n peuvent être modifiées avec [F2] comme décrit au pas 2.

Retour à l'écran Home

Voyage 200: [♦][HOME]
TI-89 Titanium: [HOME]

☝ La commande table n ^ 2/2–n, n *ne* fonctionne *pas*, lorsque la mode graphique est activé sur 4: SUITE (→ Pas 1).

Calculer quelques termes choisis

$3^{\text{ème}}$ méthode (rapide mais ne donne pas de vue d'ensemble):

Calculer quelques termes de la suite $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:

n ^ 2/2–n | n={1, 10, 20, 30, 50} [ENTER] →
{–1/2 40 180 420 1200}

14.7 Représenter une suite graphiquement

Dessiner le graphe de la suite $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ définie explicitement et de la suite $v_n = \begin{cases} 1, \text{ si } n = 1 \\ v_{n-1} + n, \text{ sinon} \end{cases}$

définie récursivement:

Préparation

Pas 1: Préparer la calculatrice pour l'étude des suites

[MODE] Graph ... 4: SUITE [ENTER] (ne doit pas être effectué chaque fois).

Définir la ou les suite(s)

Pas 2: Définir et sélectionner les suites

[♦][Y=]

D'éventuelles suites existantes, précédemment définies, peuvent être effacées avec [F1] 8 [ENTER]

Introduire la suite définie de façon explicite:

u1(n)=n^2/2–n [ENTER]

ui1= ne rien donner

Introduire la suite définie de façon récursive:

u2(n)=u2(n–1)+n [ENTER]

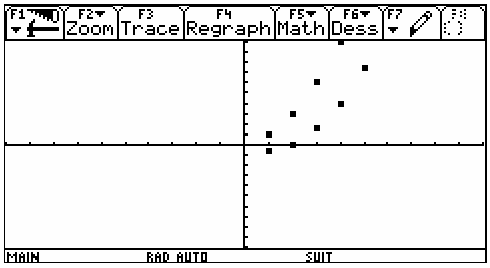
ui2=1

Les suites dont l'équation est précédée d'un ✓ seront calculées. Le symbole ✓ peut être apposé, resp. effacé à l'aide de la touche ⊕ resp. [F4].

Dessiner le(s) graphe(s)

Pas 3: Représenter le(s) graphe(s)

[♦] [GRAPH] →



Modification de la portion représentée du graphe

Représenter une autre portion du ou des graphe(s):

1ère méthode: [F2]

1: Avec les touches ⊕ et [ENTER], restreint la portion représentée à un domaine rectangulaire.
2: Représente une portion 4 fois plus petite.
3: Représente une portion 4 fois plus grande.
5: Une unité sur l'axe des n est de la même longueur qu'une unité sur l'axe des u.
6: Représente le domaine par défaut:
valeurs de n: 1...10, à partir de n=1 chaque terme de la suite est représenté par un point,
valeurs de x: –10...10, 1 marque = 1 unité,
valeurs de y (valeurs de u): –10...10, 1 marque = 1 unité.
A: Détermine le domaine des y de sorte que le graphe apparaisse entièrement pour le domaine choisi des x.

2ème méthode: [♦][WINDOW]

La portion à représenter peut également être définie de manière directe, à savoir:

	nmin: plus petite valeur de n (premier terme de la suite) nmax: plus grande valeur de n (dernier terme de la suite) plotstrt: plus petit n, pour lequel u_n doit être dessiné plotstep: pas de n pour lesquels u_n doit être dessiné xmin: plus petite valeur x xmax: plus grande valeur x xscl: intervalle entre deux marques sur l'axe des x ymin: plus petite valeur y ymax: plus grande valeur y yscl: intervalle entre deux marques sur l'axe des y
Retour à l'écran Home	**Voyage 200:** [♦][HOME] **TI-89 Titanium:** [HOME]
14.8 Recherches les bornes d'une suite Borne supérieure	La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = 4-2n$ est-elle bornée supérieurement? Le cas échéant, par quelle borne? 4–2*n [STO▸] a(n) [ENTER] → Fait xfmax(a(n), n) | n>=1 [ENTER] → n=1 a(n) | ans(1) [ENTER] → 2 La suite est bornée supérieurement et 2 est une borne supérieure.
Borne inférieure	La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = 4-2n$ est-elle bornée inférieurement? Le cas échéant, par quelle borne? 4–2*n [STO▸] a(n) [ENTER] → Fait xfmin(a(n), n) | n>=1 [ENTER] → n=∞ a(n) | ans(1) [ENTER] → –∞ La suite n'est pas bornée inférieurement.
14.9 Calculer la limite d'une suite	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = ?$ lim(1+(3/4)^n, n, ∞) [ENTER] → 1 Les résultats des calculatrices de poche sont à prendre avec précaution; → Problèmes et difficultés, n° 5 et 6. Un résultat undef peut avoir deux significations dans le contexte du calcul de limite: – la limite n'existe pas, ou – la calculatrice ne trouve pas la limite.

Problèmes et difficultés

1. Simplifier: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k+1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$

Solution: ∞, ln 2, $\pi/4$, $\pi^2/12$

Σ(1/k, k, 1, ∞) [ENTER] → $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$

Σ((–1) ^ (k+1)/k, k, 1, ∞) [ENTER] → $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k}\right)$

Σ((–1) ^ k/(2*k+1), k, 0, ∞) [ENTER] → $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{2\cdot k+1}\right)$

Σ((–1) ^ (k+1)/k ^ 2, k, 1, ∞) [ENTER] → $-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos(k\cdot\pi)}{k^2}\right)$

Aucune de ces séries ne sera reconnue.

2. $a_n=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$, $a_{k+1}-a_k=?$

Solution: $\frac{1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{k+1}$

Σ(1/i, i, n+1, 2*n) → a(n) [ENTER] → Fait

a(k+1)–a(k) [ENTER] → $\sum_{i=k+2}^{2\cdot(k+1)}\left(\frac{1}{i}\right)-\sum_{i=k+1}^{2\cdot k}\left(\frac{1}{i}\right)$

Le terme ne sera pas explicité.

3. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}v^n$ pour $|v|<1$ et $0<v<1$

Solution: $\frac{1}{1-v}$, $\frac{1}{1-v}$

Σ(v ^ n, n, 0, ∞)|v>–1 and v<1 [ENTER] → $\sum_{n=0}^{\infty}(v^n)$

Σ(v ^ n, n, 0, ∞)|v>0 and v<1 [ENTER] → $\frac{-1}{v-1}$

Le premier résultat ne nous avance guère.

4. Simplifier:

$\sum_{k=0}^{100}c^k$ pour $c\neq 1$

$\sum_{k=0}^{n}c^k$

Le résultat du deuxième problème est aussi valide pour n=100.

Solution:

$\frac{c^{101}-1}{c-1}$

$\frac{c^{n+1}-1}{c-1}$

$\frac{c^{101}-1}{c-1}$

Σ(c ^ k, k, 0, 100) | c/=1 [ENTER] → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

Σ(c ^ k, k, 0, n) [ENTER] → $\frac{c^{n+1}}{c-1}-\frac{1}{c-1}$

ans(1) | n=100 [ENTER] → $c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

Remarque: poss. domaine plus grand

Quand donc la somme sera-t-elle effectuée?

5.	Simplifier:	Solution:
	a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, lorsque n<m	0
	b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, lorsque n>m	∞
	c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, lorsque x= –1	½
	d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, lorsque x< –1	0

a) lim(x ^ n / x ^ m, x, ∞) | n<m [ENTER] → undef
b) lim(x ^ n / x ^ m, x, ∞) | n>m [ENTER] → undef
c) lim(1/(x ^ (2*n)+1),n,∞)|x=–1 [ENTER] → undef
d) lim(1/(x ^ (2*n)+1),n,∞)|x<–1 [ENTER] → Erreur: Résultat non réel
Remède: on peut essayer de désigner n et m comme @n1 et @n2:
c) lim(1/(x ^ (2*@n1)+1),@n1,∞)|x=–1 [ENTER] → ½
Ce truc ne marche malheureusement pas dans les trois autres exemples.

6.	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{20}}{n}\right)^n$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.05\cdot t}{n}\right)^n$	Solutions: $e^{\frac{t}{20}}$ $e^{0.05t}\approx 1.0513^t$
	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.04\cdot t}{n}\right)^n$	$e^{0.04t}\approx 1.04081^t$

lim((1+(t/20)/n) ^ n, n, ∞) [ENTER] → $e^{\frac{t}{20}}$
lim((1+(0.05*t)/n) ^ n, n, ∞) [ENTER] → 0
Ce résultat est faux.
lim((1+(0.04*t)/n) ^ n , n , ∞) [ENTER] → $(1.04081)^t$
Quand parvient-on à la solution, quand n'y parvient-on pas?