ETH ***EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH***

Analysis

mit dem Computer-Algebra-System des TI-92

Anhang 1:
Probleme und Fehler des CAS des TI-92

Beat Eicke und Edmund Holzherr
11. November 1997

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

Probleme und Fehler des CAS des TI-92

Wozu diese Liste?

Beim Einsatz des TI-92 sind wir auf etliche Probleme gestossen – oft bei Aufgaben aus gängigen Unterrichtswerken für schweizerische Gymnasien. Wir veröffentlichen diese Liste, weil sie für LehrerInnen wohl von einigem Interesse ist. Wer demnächst ein bestimmtes Kapitel behandelt, kann nachschlagen, welche Schwierigkeiten und Überraschungen dabei auftreten können.
Wir haben Texas Instruments auf die meisten Probleme aufmerksam gemacht und hoffen auf eine baldige Behebung der dargelegten Probleme. Manche treten auch bei grösseren CAS auf.

Beobachtete Probleme

1. **Falsche und / oder fehlende Lösungen**
   Bei manchen Aufgaben werden Scheinlösungen ausgegeben oder richtige Lösungen nicht gefunden. Manchmal werden auch bei einer Lösungskontrolle Scheinlösungen nicht als solche erkannt.
2. **Unterschiedliche Resultate auf verschiedenen TI-92**
   Offenbar sind unterschiedliche Rechnermodelle im Umlauf. Im Klassenverband könnte dies zu Problemen führen, z.B. zu Ungerechtigkeiten in Klausuren oder zu Überraschungen, wenn die Lehrperson für die Unterrichtsvorbereitung eine ältere Version verwendet als die Klasse.
   Die Versionsnummer kann vom Home-Screen aus mit der Tastenkombination [F5] ◆ [( ] abgerufen werden. Die anschliessende Rückkehr zum HOME-Screen erfolgt mit ◆ [HOME].
3. **Teilweise stundenlange Rechenzeit**
   Dies passiert z.B. bei einem bestimmten Integral für eine Polynomfunktion.

Es ist sehr schwierig anzugeben, wo genau die Grenze der Fähigkeiten des TI-92 verläuft. Manchmal genügt eine minimale Änderung an der Aufgabe, dass dem TI-92 die Lösung gelingt.

Die beschriebenen Probleme sind bei den uns zur Verfügung stehenden Geräten aufgetreten – manchmal auch nur bei einigen davon. Üblicherweise haben wir mit der Einstellung [MODE] Exact / Approx... AUTO gearbeitet. Eine Speichererweiterung haben wir nie eingesetzt. Da das CAS des TI-92 offenbar regelmässig überarbeitet wird, ist es durchaus möglich, dass das eine oder andere Problem bei den neuesten Modellen oder bei Verwendung einer Speichererweiterung überhaupt nicht mehr oder nicht genau in der beschriebenen Form auftritt.

Aufgaben

Die meisten Aufgaben sind folgendermassen gegliedert:

Aufgabennummer

Eigentliche Aufgabe

Richtige Lösung

A2. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$, x=?	Lösung: Keine Lösung
solve(1/(x–2)+1/(x+2)=4/(x^2–4),x)	$x = \infty$ or $x = -\infty$
$\pm\infty$ werden bei solchen Aufgaben üblicherweise nicht als Lösung betrachtet.	

Eingabe in den TI-92

Output des TI-92

Eventuell eine kurze Bemerkung

Bei der Lösung von Gleichungen bedeutet

- true, dass jede endliche reelle Zahl die Gleichung erfüllt;
- false, dass keine reelle Lösung gefunden wurde.

Inhalt

Zu jedem der nachfolgenden Kapitel geben wir Aufgaben an, deren Lösung dem CAS des TI-92 Probleme bereitet.

A: Bruchterme, Bruchgleichungen
B: Wurzeln
C: Gleichungen 2. / 3. / 4. Grades und verwandte Aufgaben
D: Trigonometrie
E: Potenzen, Exponentialgleichungen, Logarithmen
F: Komplexe Zahlen
G: Folgen und Reihen
H: Grenzwerte
I: Differential- / Integralrechnung
J: Kombinatorik

Beat Eicke und Edmund Holzherr

A. Bruchterme, Bruchgleichungen

A1. $\frac{12ax-5}{a}=6x$, a=? Lösung: a=$\frac{5}{6x}$

solve((12*a*x–5)/a = 6*x, a) a=$\frac{5}{6x}$ oder $\frac{12\cdot a\cdot x-5}{a}=6\cdot x$

Nicht alle Geräte finden die Lösung. Es sind unterschiedliche Rechnermodelle im Umlauf. Im Klassenverband könnte dies zu Problemen führen.

A2. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$, x=? Lösung: Keine Lösung

solve(1/(x–2)+1/(x+2)=4/(x^2–4),x) x = ∞ or x = – ∞

± ∞ werden bei solchen Aufgaben üblicherweise nicht als Lösung betrachtet.

A3. Ist x=2 eine Lösung von Aufgabe A2.? Lösung: Nein

1/(x–2)+1/(x+2)=4/(x^2–4) | x=2 true

Für x=2 sind zwei Brüche nicht definiert, weil ihr Nenner 0 wird.

A4. $\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x+8}{x^2-4}$, x=? Lösungsmenge IL = ID = IR \ {–2, 2}

solve(3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4), x) true

Die Definitionslücken werden ignoriert.

A5. Sind x=2 und x=–2 Lösungen von A4.? Lösung: Nein

3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4) | x=2 true

3/(x–2)–1/(x+2)=(2*x+8)/(x^2–4) | x=–2 true

Beide Zahlen sind keine Lösungen, weil beim Einsetzen einige Nenner 0 werden.

A6. $\left(\frac{a+2b}{a^2-b}x-\frac{2a-b}{a-b^2}\right)^2$ =?

expand(((a+2*b)/(a^2-b)*x–(2*a–b)/(a–b^2))^2) Warning: Memory full, simplification might be incomplete

Bis zu dieser Meldung vergehen etwas über 30 Minuten. Das ausgegebene Resultat ist erst teilweise ausmultipliziert. Deshalb ist schrittweises Vorgehen zu empfehlen:
expand(((a+2*b)/(a^2-b)*x–(2*a–b)/(a–b^2))^2, x)
expand(ans(1))

A7. $v=\frac{a+b}{1+\frac{a\cdot b}{c^2}}$, c=? Lösung: c=$\pm\sqrt{\frac{abv}{a+b-v}}$

solve(v=(a+b)/(1+a*b/c^2), c) false

Beide Lösungen werden unterschlagen. Variante:

csolve(v=(a+b)/(1+a*b/c^2), c) $c=\frac{-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot i\cdot\sqrt{v}}{\sqrt{v-a-b}}$ or $c=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot i\cdot\sqrt{v}}{\sqrt{v-a-b}}$

Das Problem tritt auch auf, wenn man a und b durch 1 ersetzt.

A8. $\frac{a}{x} + b = \frac{c}{x} + d$, x=? Solution: x=$\frac{c-a}{b-d}$

---

solve(a/x+b=c/x+d, x) x=$\frac{-(a-c)}{b-d}$ resp. $\frac{b \cdot x + a - c}{x} = d$

Nicht alle TI-92 finden die Lösung. Offenbar sind verschiedene Modelle im Umlauf. Im Klassenverband kann dies zu Problemen führen.

B. Wurzeln

B1. $a-\sqrt{x-a}=\sqrt{x}$, x=? Lösung: $x=\begin{cases}0, \text{ falls } a=0\\ \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 \text{ sonst}\end{cases}$

solve(a–√(x–a) = √(x), x) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x}=a$

Die Lösung der Aufgabe gelingt nicht. Variante: Gleichung zuerst quadrieren:

solve((a–√(x–a) = √(x))^2, x) $x=\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}+1/4$ and $a-1\geq 0$ or a = 0

Warning: Operation might introduce false solutions

x wird jetzt gefunden, aber die angegebene Bedingung ist immer noch falsch.

B2. $6\left(\sqrt{x+4}-2\right)=x\left(5-\sqrt{x+4}\right)$, x=? Lösung: x=0 oder x=12

solve(6*(√(x+4)–2) = x*(5–√(x+4)), x) x=0.

Eine Lösung fehlt. Variante: Gleichung zuerst quadrieren.

solve((6*(√(x+4)–2) = x*(5–√(x+4)))^2, x) x=29.316 or x=12. or x=0. or x=–4.18833E–7

Warning: Operation might introduce false solutions

Das ist in der Tat so. Abhilfe: Substitution von x+4 durch y:

solve(6*(√(y)–2)=(y–4)*(5–√(y)), y) y=16 or y=4

Rücksubstitution:

solve(ans(1), x) | y=x+4 x=12 or x=0

B3. $\sqrt{1+x\sqrt{1+8x}}=x+1$, x=? Lösung: x=0 oder x=1 oder x=3

solve(√(1+x*√(1+8*x))=x+1, x) x = 0. or x = –.125

Eine „Lösung“ ist falsch, zwei richtige Lösungen fehlen. Abhilfe: Gleichung zuerst quadrieren:

solve((√(1+x*√(1+8*x))=x+1)^2, x) x = 3. or x=1. or x=0.

Warning: Operation might introduce false solutions

C. Gleichungen 2. / 3. / 4. Grades und verwandte Aufgaben

C1. $x^4 - 3ax^2 - 4a^2 = 0$, x=?

Lösung: $x=\begin{cases} \pm\sqrt{-a}, \text{ falls } a \le 0 \\ \pm 2\sqrt{a}, \text{ falls } a \ge 0 \end{cases}$

solve(x^4–3*a*x^2–4*a^2=0,x)

$x=2\sqrt{a}$ or $x=-2\sqrt{a}$

Zwei der vier denkbaren Lösungen fehlen. Möglicherweise werden sie als komplexe Lösungen betrachtet. Das ist überraschend, weil $x^2+a=0$ richtig nach x aufgelöst wird. Abhilfe:

solve(factor(x^4–3*a*x^2–4*a^2) = 0,x)

$x=-\sqrt{-a}$ and $a \le 0$ or $x=\sqrt{-a}$ and $a \le 0$ or $x=2\sqrt{a}$ and $a \ge 0$ or $x=-2\sqrt{a}$ and $a \ge 0$

C2. $a\cdot x^4 - b\cdot x^2 - c = 0$, x=?

Lösung: $x = \pm\dfrac{\sqrt{2\cdot(b \pm \sqrt{4\cdot a\cdot c + b^2})}}{2\cdot\sqrt{a}}$

solve(a*x^4 – b*x^2 – c=0,x)

$x = \dfrac{\sqrt{2\cdot(\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2}+b)}}{2\cdot\sqrt{a}}$ or

$x = \dfrac{-\sqrt{2\cdot(\sqrt{4\cdot a\cdot c+b^2}+b)}}{2\cdot\sqrt{a}}$

Zwei der vier denkbaren Lösungen fehlen. Möglicherweise werden sie als komplexe Lösungen betrachtet.

C3. Welches sind die reellen Nullstellen von $x+\frac{1}{x}-p$, wenn $|\,p\,| < 2$?

Lösung: Es gibt keine.

zeros(x+1/x–p, x) | p>–2 and p<2

$$\left\{\frac{\sqrt{p^2-4}+p}{2} \quad \frac{-\left(\sqrt{p^2-4}+p\right)}{2}\right\}$$

Die Einschränkung | wird ignoriert.

D. Trigonometrie

D1. sin x = cos x, $x \in [0, 2\pi]$, x=? Lösung: x= ¼·π oder x=5/4·π

solve(sin(x)=cos(x),x) | x>=0 and x<=2*π

$$x = \frac{(4 * @n1 - 3) \cdot \pi}{4}$$

Der Operator | wird ignoriert.

Generell darf man bei der Lösung von goniometrischen Gleichungen keine Wunder erwarten.

E. Potenzen, Exponentialgleichungen, Logarithmen

E1. $1=(-1)^k$, k=? — Lösung: k irgendeine gerade Zahl

solve(1=(–1)^k, k)	false
Abhilfe:	
solve(1=(–1)^@n1, @n1)	@n1=2*@n67

E2. $10^{5x-5/2}=10^{4x-1}$, x=? — Lösung: x=3/2

solve(10^(5*x–5/2)=10^(4*x–1), x)	x=–∞ or x=3/2

–∞ wird bei solchen Problemen üblicherweise nicht als Lösung betrachtet.

E3. Zeichne den Graphen von $y(x)=x^{1/3}$ — Lösung: y(x) ist nur für $x \geq 0$ definiert

graph x^(1/3)	Der Graph wird auch für x<0 gezeichnet.

Die Definition der Funktion für negative x ist problematisch (Potenzgesetze). Abhilfe:
graph x^(1/3) | x >=0
Das Problem tritt nur bei folgender Einstellung auf: MODE / Complex Format: Real

E4. $\lg\sqrt{x+1}+3\cdot\lg\sqrt{x-1}=2+\lg\sqrt{x^2-1}$, x=? — Lösung: x=101

solve(log(√(x+1))+3*log(√(x–1))=2+log(√(x^2–1)), x)
x=101. or x=–99.
Warning: Questionable solution

–99 ist keine Lösung.
Kontrolle der angegebenen „Lösungen“:

log(√(x+1))+3*log(√(x–1))=2+log(√(x^2–1)) | x={–99, 101}	{false true}

–99 ist also keine Lösung, 101 ist richtig.

E5. Sind 1 und –1 Lösungen von E4.? — Lösung: Nein

log(√(x+1))+3*log(√(x–1))=2+log(√(x^2–1)) | x={–1, 1}	{false true}

Beides sind keine Lösungen, weil Logarithmen von nicht-positiven Zahlen auftreten.

E6. $200\cdot(1-e^{-\frac{t}{150}})=50$, t=? — Lösung: $t=-150\cdot\ln 3+300\cdot\ln 2$

solve(200*(1–e^(–t/150))=50, t)	false Warning: Memory full, simplification might be incomplete
solve(200*(1–e^(–t/150))–50=0, t)	t=–150·ln(3)+300·ln(2)

Interessanterweise gelingt die Lösung der Aufgabe auf Anhieb, wenn das Vorzeichen im Exponenten auf + geändert wird:

solve(200*(1–e^(t/150))=50, t)	t=150·ln(3)–300ln(2)
solve(200*(1–e^(t/v))=50, t)	t=(ln(3)–2·ln(2))·v

E7. 0^0=? — Lösung: Nicht definiert

0^0	1

F. Komplexe Zahlen

F1. $z+2i\bar{z}=8+7i$, z=? Lösung: z=2+3i

csolve(z+2*i*conj(z)=8+7*i, z)	z=22/5–9/5·i

Der TI-92 liefert ein falsches Resultat, und zwar auch dann, wenn vorher die Variable z mit a+b*i→z als komplexe Zahl deklariert worden ist. Gemäss Handbuch wird conj(z) generell zu z vereinfacht, was aber nicht immer so ist:

a+b*i → z	
conj(z)	a–b·i

F2. $z^3+3z^2+i=0$, z=? (Komplexe Lösungen) Lösung: z=–0.394+0.472·i oder z=–3.008–0.110·i oder z= 0.402–0.362·i

csolve(z^3+3*z^2+i=0, z)	false
czeros(z^3+3*z^2+i, z)	{ }

Keine der drei Lösungen wird gefunden. Abhilfe: zuerst cfactor(..., z) anwenden.

F3. $z^3–3z+i+2=0$, z=? (Komplexe Lösungen) Lösung: z= 0.606+0.472·i oder z=–2.008–0.110·i oder z= 1.402–0.362·i

csolve(z^3–3*z+i+2=0, z)	false Warning: Memory full, simplification might be incomplete

Die Lösungen werden trotz ca. 3¾ Stunden Rechenzeit nicht gefunden. Abhilfe: Zuerst cfactor(..., z) anwenden.

czeros(z^3–3*z+i+2, z)	{ } Warning: Memory full, simplification might be incomplete

Die Lösungen werden trotz ca. 3¾ Stunden Rechenzeit nicht gefunden. Abhilfe: Zuerst cfactor(..., z) anwenden.

G. Folgen und Reihen

G1. $a_n := n^2 - n + 3$, $a_{n+1} = ?$ $a_{m+1} = ?$ — Lösung: n^2+n+3 bzw. m^2+m+3

n^2–n+3 → a(n)

a(n+1) — Error: Circular definition (nur auf einigen Taschenrechnern)

a(m+1) — m^2+m+3

Das Problem besteht darin, dass unterschiedliche Rechnermodelle im Umlauf sind. Im Klassenverband könnte dies zu Problemen führen.

G2. Vereinfache:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k},\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2},\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Lösung:

e, 2^n, ln 2, $\pi/4$

$\pi^2/12$, 0, $\binom{2n}{n}$

Σ(1/k!, k, 0 ∞) — $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)$

Σ(ncr(n, k), k, 0, n) — usw.

Σ((–1)^(k+1)/k, k, 1, ∞)

Σ((–1)^k/(2*k+1), k, 0, ∞)

Σ((–1)^(k+1)/k^2, k, 0, ∞)

Σ((–1)^k*ncr(n, k), k, 0, n)

Σ(ncr(n, k)^2, k, 0, n)

Keine dieser z.T. berühmten Reihen wird erkannt.

G3. $a_n := \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$, $a_{k+1} - a_k = ?$ — Lösung: $\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k-1}$

Σ(1/i, i, n+1, 2*n) → a(n)

a(k+1)–a(k) — $\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} \left(\frac{1}{i}\right) - \sum_{i=k+1}^{2k} \left(\frac{1}{i}\right)$

Der Term wird nicht ausgewertet.

G4. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ für v=¾, v=–¾, |v|<1 und 0<v<1 — Lösung: 4, 4/7, $\frac{1}{1-v}$, $\frac{1}{1-v}$

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v=3/4 — 4

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v=–3/4 — undef

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>–1 and v<1 — undef

Σ(v^n, n, 0, ∞)|v>0 and v<1 — $\frac{-1}{v-1}$

Bei der zweiten und dritten Aufgabe liefert der TI-92 problematische Resultate.

G5. Vereinfache: Lösung:

$\sum_{k=0}^{100} c^k$ für $c \neq 1$ $\qquad \dfrac{c^{101}-1}{c-1}$

$\sum_{k=0}^{n} c^k$ $\qquad \dfrac{c^{n+1}-1}{c-1}$

Werte das Resultat der zweiten Aufgabe aus für n=100. $\qquad \dfrac{c^{101}-1}{c-1}$

Σ(c^k, k, 0, 100) | c/=1	$c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$
Σ(c^k, k, 0, n)	$\dfrac{c \cdot c^n}{c-1} - \dfrac{1}{c-1}$
ans(1) | n=100	$c^{100}+c^{99}+c^{98}+c^{97}+c^{96}+c^{95}+c^{94}+\ldots$

Wann wendet der Rechner die entsprechende Regel an?

H. Grenzwerte

H1. Vereinfache: | Lösung:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls n<m	0
b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls n>m	∞
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, falls x= –1	½
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}+1}$, falls x< –1	0

a) limit(x^n / x^m, x, ∞) | n<m	undef
b) limit(x^n / x^m, x, ∞) | n>m	undef
c) limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x=–1	undef
d) limit(1/(x^(2*n)+1),n,∞)|x<–1	Non real result

Undef hat zwei verschiedene Bedeutungen:
- Der Limes existiert nicht (z.B. bei limit(1/x, x, 0)),
- Der Limes existiert zwar, aber der TI-92 findet ihn nicht.

Abhilfe: Man kann versuchen, n und m als @n1 und @n2 zu bezeichnen:

c) limit(1/(x^(2*@n1)+1),@n1,∞)|x=–1 ½

Bei den anderen drei Beispielen klappt dieser Trick freilich nicht.

H2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{99}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{100}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{101}}{n}\right)^n$ Lösung: $e^{\frac{t}{99}} \quad e^{\frac{t}{100}} \quad e^{\frac{t}{101}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{999}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{1000}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{V}}{n}\right)^n$ $e^{\frac{t}{999}} \quad e^{\frac{t}{1000}} \quad e^{\frac{t}{V}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\frac{t}{20}}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.05\cdot t}{n}\right)^n \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{.04\cdot t}{n}\right)^n$ $e^{\frac{t}{20}} \quad e^{0.05t}\approx 1.0513^t \quad e^{0.04t}\approx 1.0408^t$

limit((1+(t/99)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{99}}$ oder undef (je nach Gerät)
limit((1+(t/100)/n)^n, n, ∞)	∞
limit((1+(t/101)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{101}}$
limit((1+(t/999)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{999}}$
limit((1+(t/1000)/n)^n, n, ∞)	∞
limit((1+(t/V)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{V}}$
limit((1+(t/20)/n)^n, n, ∞)	$e^{\frac{t}{20}}$
limit((1+(0.05*t)/n)^n, n, ∞)	0
limit((1+(0.04*t)/n)^n , n , ∞)	$(1.04081)^t$

Wann erscheint ∞, wann undef, wann 0, wann die richtige Lösung? Die allgemeine Lösung (6. Beispiel) gelingt, während sonst manche Resultate falsch sind.

I. Differential-/Integralrechnung

I1. Leite ab: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)$ Lösung: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}$

d(Σ(ln(x+k), k, 0, n), x)	$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(x+k)\right)$

Der TI-92 scheint die Regel $\left(\sum f_k(x)\right)' = \sum f_k'(x)$ nicht zu kennen.

I2. Bestimme die Extrema von Lösung: x=–r oder $x = \frac{7+\sqrt{17}}{16} r$

$f(x) = (r+x)\sqrt{2r(r-x)} + x^2$

(r+x)*√(2*r*(r–x))+ x^2 → f(x,r)	
zeros(*d*(f(x,r),x), x)	{ }

Gemäss TI-92 gibt es keine Lösungen. Das ist falsch.

I3. Berechne die Bogenlänge des Viertelkreises Lösung: $\frac{\pi}{2} \cdot r$

arclen(√(r^2–x^2), x, 0, r)	$\lvert r\rvert \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\,dx$

I4. $\int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = ?$ $\int \sqrt{\frac{1}{r^2-x^2}}\,dx = ?$ Lösung: $\sin^{-1}\left(\left|\frac{x}{r}\right|\right) + c$

(0≤ x<r)

∫(1/√(r^2–x^2), x, c)	$\sin^{-1}\left(x \cdot \left|\frac{1}{r}\right|\right) + c$
∫(√(1/(r^2–x^2)), x, c)	$\int \sqrt{\frac{-1}{x^2-r^2}}\,dx + c$

Die Lösung wird nur beim ersten Mal gefunden.

I5. $\int_0^1 (ax^2 - x - a)^2\,dx = ?$ Lösung: $\frac{8}{15}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$

$\int_1^2 (ax^2 - x - a)^2\,dx = ?$ $\frac{38}{15}a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{7}{3}$

∫((a*x^2–x–a)^2,x,0,1)	$\frac{8}{15}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$

Das Resultat wird gefunden, aber erst nach rund 3 Stunden Rechenzeit..., obwohl das *unbestimmte* Integral sofort gefunden wird. (Mitteilung: Peter Geiger, Zürich)

∫((a*x^2–x–a)^2,x,1,2)	$\frac{38}{15}a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{7}{3}$

Bei anderen Integrationsgrenzen gelingt die Berechnung sofort.

I6. $\int_1^n (-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1)dx = ?$	$-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n-\frac{31049}{41580}$
$\int_0^n (-\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}-x^2+1)dx = ?$	$-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n$
$\int_0^n (\frac{x^{10}}{120}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+x^2+1)dx = ?$	$\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}+\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}+\frac{n^3}{3}+n$

∫(-x^10/120+x^8/24-x^6/6+x^4/2-x^2+1,x,1,n) $-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n-\frac{31049}{41580}$

∫(-x^10/120+x^8/24-x^6+x^4/2-x^2+1,x,0,n) $-\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}-\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}-\frac{n^3}{3}+n$

Rechenzeit bei diesem Beispiel: über 5 Stunden!

∫(x^10/120+x^8/24+x^6/6+x^4/2+x^2+1,x,0,n) $\frac{n^{11}}{1320}+\frac{n^9}{216}+\frac{n^7}{42}+\frac{n^5}{10}+\frac{n^3}{3}+n$

Eine kleine Änderung der Integrationsgrenzen oder des Integranden hat erheblichen Einfluss auf die Rechenzeit.

I7. $\int \sin(\ln x)dx = ?$ Lösung: $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$

∫ (sin(ln(x)), x, c)	∫ sin(ln(x))dx + c
∫ (sin(ln(x)), x, c) | x>0	∫ sin(ln(x))dx + c

Es wird keine Stammfunktion gefunden.

I8. $\int x^n dx$ = ?	Lösung: $\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}, & \text{falls} \quad n \neq -1 \\ \ln\lvert x\rvert & \text{sonst} \end{cases}$
$\int_a^b x^n dx$ = ?	Das Resultat hängt ab von n, a, b.
$\int_0^1 x^n dx$ = ?	Da 0 als Integrationsgrenze auftritt, hängt das Resultat stark von n ab.

∫ (x^n, x) $\frac{x \cdot x^n}{n+1}$

Dieses Resultat stimmt z.B. für n=–1 nicht.

∫ (x^n, x , a , b) $\frac{-a \cdot a^n}{n+1}+\frac{-b \cdot b^n}{n+1}$

Dieses Resultat stimmt z.B. für n=–1 nicht.

∫ (x^n, x, 0, 1) undef

Wenn das dritte Integral undef liefert, müsste das zweite erst recht undef liefern.

J. Kombinatorik

J1. Vereinfache: Lösung:

$(n+1)\cdot n!$	$(n+1)!$
$\frac{n}{s}\cdot\binom{n-1}{s-1}$	$\binom{n}{s}$
(n+1)*n!	(n+1)*n!
n/s*ncr(n–1, s–1)	$\frac{n!}{s!\cdot(-s+n)!}$

In leicht modifizierten Aufgaben wird die zur Vereinfachung notwendige Beziehung angewendet:

(n+1)*n!–(n+1)!	0
n/s*ncr(n–1, s–1) – ncr(n, s)	0