Analysis mit dem TI-92 – eine Unterrichtseinheit

Autoren
Beat Eicke, Stützli 7, CH – 8750 Glarus,
E-Mail: eicke@bluewin.ch
Edmund Holzherr, Chilehalde 13, CH – 6026 Rain,
E-Mail: holzherr@swissonline.ch

Zusammenfassung
Wir skizzieren eine Unterrichtseinheit für die Analysis. Dabei sollen die Möglichkeiten des CAS des TI-92 möglichst optimal genutzt werden. Anhand einiger ausgewählter Beispiele zeigen wir, welche Möglichkeiten sich bieten, aber auch welche Probleme dabei auftreten können.

Inhalt:

1. Modelle

1.1 Wozu Analysis?

Der klassische Analysisunterricht erscheint uns – provokativ formuliert – immer mehr als ein Trainingslager für eine Hochgebirgstour in einer supermodernen Sporthalle.
Wir üben und perfektionieren schwierigste Klettertechniken wie Ableitungsregeln, Kurvendiskussionen, Extremalaufgaben und Integrationsmethoden. Das Training versuchen wir dabei so geschickt zu motivieren und zu organisieren, dass die Schülerinnen und Schüler die Techniken selbst als erstrebenswertes Ziel akzeptieren.
Weil uns dann am Schluss der eigentlichen Übungsphase ganz einfach die Zeit und oft auch die notwendigen Hilfsmittel fehlten, um die Tour durchzuführen, konnten wir bisher unser ungutes Gefühl leicht besänftigen.
Der neue, gesamtschweizerische Rahmenlehrplan für die Mathematik verlangt aber unmissverständlich die Bearbeitung von mathematischen Modellen aus der Wirklichkeit, die in der Analysis wie kaum in einem andern Teilgebiet der Mathematik ausser vielleicht noch in der Stochastik so bedeutungsvoll sind.

Mit einem klassischen Lehrgang der Analysis kann man der Forderung des neuen Lehrplans nicht mehr genügen. Selbst dann nicht, wenn es gelingen würde, noch einige einfache Lösungsmethoden für Differentialgleichungen unterzubringen.
Wir glauben, dass uns ein Werkzeug wie der TI-92 helfen würde, die schwierige Situation in der Analysis zu meistern oder gar zu überwinden. Schon in der Einführung könnte für die Schülerinnen und Schüler das Hauptziel der Analysis erfassbar werden. Sie erfahren die Bedeutung der Analysis bei den Modellbildungen anhand nicht trivialer Anwendungen.
Wir wollen Ihnen nun einen Einstieg in die Analysis mit einem einfachen Beispiel, dem Meerwasseraquarium, skizzieren. Dieses Modell erscheint uns darum besonders geeignet, weil es sich auch für Schülerprojekte leicht variieren und ausbauen lässt. Ziel ist unter anderem die Motivation des Begriffes der Ableitung, der momentanen Änderungsrate.

1.2. Untersuchungen am Aquarium

Aufgabenstellungen
In ein Meerwasseraquarium (erwünschter Salzgehalt ca. 3.5%) wurde versehentlich Wasser mit einem Salzgehalt von q% eingefüllt. Das Missgeschick kann auf verschiedene Arten, die zudem von der Ausgangssituation abhängen, korrigiert werden.

1. Nachsalzen
Es wurde versehentlich Süsswasser (q=0) eingefüllt. Der Fehler wird korrigiert, indem man nun während einer gewissen Zeit Meerwasser einleitet und gleichzeitig die gleiche Menge Aquariumwasser durch den Überlauf ableitet. Wie wächst die Salzmenge im Aquarium ?

2. Entleeren
Nachdem man den Fehler bemerkt hat, wird das Aquarium durch einen Abfluss im Boden des Aquariums entleert, um danach das Aquarium mit Meerwasser wieder aufzufüllen. Wie lange dauert es,bis das Aquarium zur Hälfte bzw. völlig entleert ist?

3. Salzen - Entleeren
Man bemerkt den Fehler, nachdem das Aquarium zu einem Drittel gefüllt ist. Um nun das Missgeschick zu korrigieren, öffnet man den Ablauf und leitet gleichzeitig z ℓ Salzwasser pro Sekunde mit einem Salzgehalt von p% in das Aquarium. Wie verändern sich das Wasservolumen und die Salzmenge im Aquarium ?
Spezialfälle

– z = 0, d. h. kein Zufluss	Entleeren
– z = Abfluss und q = 0	einfaches Nachsalzen: Wachstumsprozess
– z = Abfluss und p = 0	einfaches Entsalzen: Zerfallsprozess

– Durch den Ablauf werden konstant a ℓ Aquariumwasser pro Sekunde abgepumpt (abgelassen).

a) a < z und p < q	*Entsalzen und Füllen des Aquariums*
b) a < z und p > q	*Nachsalzen und Füllen des Aquariums*
c) a = z und q = 0	*einfaches Nachsalzen: Wachstumsprozess*
d) a = z und p = 0	*einfaches Entsalzen: Zerfallsprozess*

1. Modell: Nachsalzen

Modellierung: Wir treffen für das Modell die folgenden Annahmen:

- Inhalt: V_o = 2700 Liter q% = 0 %
- Zufluss: z = 18 kg /min p% = 3.5 %
- Überlauf: a = 18 kg /min
- Homogene Salzkonzentration im Aquarium
- In einem kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ wird zuerst das Wasser abgeschöpft und danach das Salzwasser eingefüllt.
- 1 kg Salzwasser = 1 ℓ Salzwasser

Auftrag: Untersuche die Salzmenge S (t).

Eigenschaften von S: Aus den Modellbeschreibungen können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

- $S(0)=0$ und $S(t)\geq 0$
- S ist eine *streng monoton wachsende* Funktion
- $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{p}{100} \cdot V_o = 94.5$
- ID: $t \geq 0$, \W: $0 \leq S(t) < 94.5$
- Vermutung: S wird immer langsamer zunehmen

Allein aufgrund dieser Eigenschaften kann man den Graphen der Funktion S skizzieren, der das Modell qualitativ schon ziemlich genau beschreibt.

Manuelle Näherungen: Die Schülerinnen und Schüler sollten jetzt unbedingt einige Berechnungsschritte manuell durchführen. Sie werden dann schon nach wenigen Schritten das Bedürfnis haben, den leicht erkennbaren Algorithmus bei den Berechnungen auszunützen. Dann ist auch die Zeit reif für die allgemeine Approximation und deren Umsetzung auf dem TI-92 mit dem Sequence - Graphing. Diese Methode werden wir uns beim allgemeinen Modell Salzen - Entleeren ansehen.
Da das Nachsalzungsmodell ein sehr einfacher Wachstumsprozess ist, für den man die exakte Lösung direkt bestimmen kann, wollen wir jetzt zuerst den Einsatz des CAS für die Herleitung der exakten Lösung untersuchen.

Exakte Lösung: In einem kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ gilt :

$$\boxed{S(t+\Delta t) \approx S(t) - 18 \cdot \frac{S(t)}{2700} \cdot \Delta t + 18 \cdot \frac{3.5}{100} \cdot \Delta t}$$

Für die manuelle Herleitung ist es vorteilhaft, folgende Ersetzungen zu verwenden:

$$S(t_{i-1}+\Delta t) = S(t_i) \approx S(t_{i-1}) \cdot \underbrace{(1-\Delta t/150)}_{z} + \underbrace{.63\cdot\Delta t}_{A} \quad \text{mit} \quad \Delta t=\frac{t}{n}$$

Damit erhält man: $S(t_n) = A\frac{1-z^n}{1-z} = 94.5\ (1 - (1 - \frac{t/150}{n})^n)$

Die Ersetzungen z und A sind auch bei der manuellen Herleitung fast zwingend. Beim CAS sind sie absolut notwendig. Ansonst rechnet sich der TI-92 ins Abseits, weil er zuerst alles ausmultipliziert und danach das Faktorisieren nicht mehr schafft.

CAS-Herleitung: Die rekursive Definition der Folge auf dem TI-92 ist:

Define s (i) = **when (**i = 0, 0, s (i -1)* z + a**)** $\Rightarrow$ Done

Eine Teilfolge erhält man dann mit:

seq (s (i), i, 0, 5, 1**)** $\Rightarrow \{0 \;\; a \;\; a\cdot z + a \;\; a\cdot(z^2+z+1) \; \ldots \; a\cdot(z^4+z^3+z^2+z+1)\}$

Hinweise:

– Die Teilsumme der geom. Reihe wird vom CAS für konkrete n nicht erkannt.

– Der max. Wert für i in seq(), der keinen Memory-Error liefert, ist 26

Die allgemeine Reihe bekommt man mit:

factor(a * **Σ(** z^i, i, 0, n-1 **))** $\Rightarrow \dfrac{a\cdot(z^n-1)}{z-1}$

ans (1 **)** | z = 1 – (t /150) / n **and** a = 0.63 · t /n

◆ [ENTER] $\Rightarrow -94.5\left(\left(\dfrac{-\ .006667\cdot(t-150\cdot n)}{n}\right)^n-1\right)$

Hinweise:

– Das exakte Schlussresultat wird vom CAS sehr unübersichtlich dargestellt (mit e und ln). Daher wird ein Näherungswert berechnet.

– Die Konvergenz der Formel kann man mit dem TI-92 graphisch oder mit einer Tabelle untersuchen.

Grenzwert: Mit dem **Limit**-Befehl des CAS kann der Grenzwert der Folge bestimmt werden. Anstelle des festen Wertes 150 verwenden wir zuerst die Variable v, die wir dann wieder ersetzen.

limit (94.5*(1-(1-(t /v)/n)^n),n,∞**)** $\Rightarrow \quad 94.5\cdot(e^{\frac{t}{v}}-1)\cdot e^{-\frac{t}{v}}$

ans(1 **)** | v = 150 $\Rightarrow \quad 94.5\cdot e^{-\frac{t}{150}}\cdot(e^{\frac{t}{150}}-1)$

Für den Grenzwert gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} 94.5\left(1 - \left(1 - \frac{(t/150)}{n}\right)^n\right) = 94.5\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{150}}\right) = S(t)$$

Problem (Kabarettistisches Glanzstück des TI-92): Die direkte Bestimmung des Grenzwertes mit **Limit** gelingt nicht:

limit ((1 - (t / 150) / n)^n, n, ∞**)** $\Rightarrow$ **undef**

undef hat zwei Bedeutungen:

– Der Grenzwert existiert nicht.

– Der TI-92 kann den Grenzwert nicht bestimmen.

Wir untersuchen anhand einiger ähnlicher Aufgaben, wann das CAS richtig rechnet. Das Resultat ist abhängig von der Version des eingesetzten Rechners:

Version 1.4 und 1.7:

limit ((1-(t /v)/ n)^n,n,∞**)** | v ={ 95, 96, 97, 98, 99, 100 }

$\Rightarrow \{ e^{-\frac{t}{95}} \quad 0 \quad e^{-\frac{t}{97}} \quad \text{undef} \quad \text{undef} \quad \infty \}$

Version1.12:

limit ((1-(t /v)/ n)^n,n,∞**)** | v ={ 95, 96, 97, 98, 99, 100 }

$$\Rightarrow \{ e^{-\frac{t}{95}} \quad e^{-\frac{t}{96}} \quad e^{-\frac{t}{97}} \quad e^{-\frac{t}{98}} \quad e^{-\frac{t}{99}} \quad \infty \}$$

limit ((1-(t /v)/ n)^n,n,∞**)** | v ={ 224, 225, 228, 100 }

$$\Rightarrow \{ e^{-\frac{t}{224}} \quad \text{undef} \quad 0 \quad \infty \}$$

2. Modell: Entleeren

Dieses Modell wird in unserem Skript (siehe Kapitel 5) ausführlich untersucht.

3. Modell: Salzen - Entleeren

Anhand dieses Modells wollen wir die Approximation mit dem Sequence- Graphing des TI-92 anschauen.

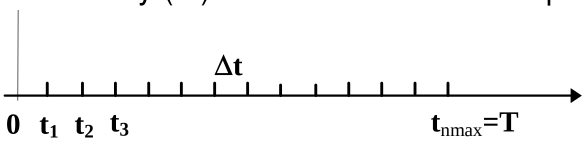
Modellierung: Wir treffen für das Modell die folgenden Annahmen:
- Inhalt: m_0 = 900 kg, q% = 6%.
- Masse: l = 180 cm, b = 100 cm und h = 150 cm.
- Ablauf: Q = 36 cm^2.
- Zufluss: z = 18 kg/s = 18 ℓ /s = 18000 cm^3 /s, p% = 3%
- Homogene Salzkonzentration im Aquarium
- In einem kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] wird zuerst das Wasser abgelassen und danach das Salzwasser eingefüllt.
- 1 kg Salzwasser = 1 ℓ Salzwasser
- Anfangsvolumen: V_0 = 900 ℓ = 900 000 cm^3
- g = 1000 cm · s^{-2} (10 m · s^{-2})

Auftrag: Untersuche die Entwicklung des Volumens V (t) und der Salzmenge S (t).

Approximation mit dem Computer: Für die Berechnung des Abflusses brauchen wir das Gesetz von Torricelli:

Die Abflussgeschwindigkeit ist: $v(t) = 20\sqrt{5} \cdot \sqrt{y(t)}$ cm / s

Dabei ist y (t) der Wasserstand im Aquariumzum Zeitpunkt t.



T=1000 s
nmax = 100
Δt = 10
$t_n = \Delta t \cdot n = 10 \cdot n$

Wassermenge V [cm^3]:

$$\text{Abfluss} \approx Q \cdot v(t_{n-1})\,\Delta t = 36 \cdot 20\sqrt{5} \cdot \sqrt{y(t_{n-1})}\,\Delta t = 12\sqrt{V(t_{n-1})}\,\Delta t$$

$$V(t_n) \approx V(t_{n-1}) - 12\sqrt{V(t_{n-1})}\,\Delta t + 18 \cdot 10^3\ \Delta t$$

Salzmenge S [kg]:

$$\text{Salzverlust} \approx Q \cdot v(t_{n-1}) \cdot \frac{S(t_{n-1})}{V(t_{n-1})} \cdot \Delta t = \frac{12}{\sqrt{V(t_{n-1})}} S(t_{n-1}) \cdot \Delta t$$

$$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - \frac{12}{\sqrt{V(t_{n-1})}} \cdot S(t_{n-1})\,\Delta t + 18 \cdot 10^3 \frac{3}{100}\,\Delta t$$

Diese Rekursionen müssen in die Notationen des Sequence-Graphing übersetzt werden. Die Erfahrungen haben uns gezeigt, dass dieser Schritt für die Schülerinnen und Schüler nicht trivial ist. Man muss ihnen genügend Zeit und Übungsmaterial zur Verfügung stellen, um darin eine gewisse Fertigkeit zu erreichen.

Demonstration des TI-92:
Einstellung :
[MODE] Graph........FUNCTION → 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO → APPROXIMATE

[Y =]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
✔u2(n)= u2(n-1) - 120*√ (u2(n-1))+180000	(Volumen $V(t_n)$)
ui2 = 900000	(Volumen $V(t_0)$)
u3(n) = u3(n-1)*(1-120 / √ (u2(n-1)))+ 5.4	(Salz: $S(t_n)$)
ui3 = 54	(Salz: $S(t_0)$)

Bemerkung: Bei einer Folge kann man mit [F4] das Zeichen ✔ setzen oder löschen. Für die so ausgewählte Folge wird der Graph gezeichnet.

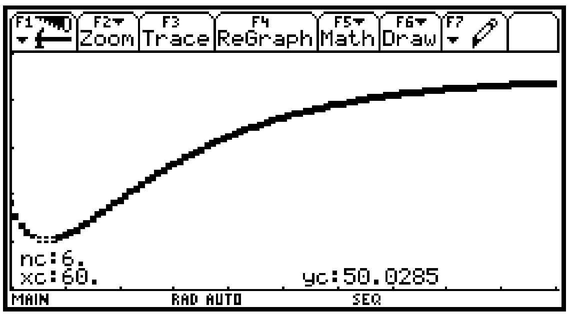
[F 7]	Axes:	Time → 3: CUSTOM	
	X Axis:	u1	(Zeit: t_n)
	Y Axis:	u3	(Volumen: $S(t_n)$)

[WINDOW]

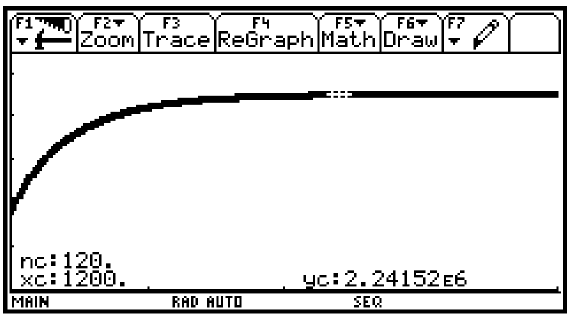
nmin = 0	nmax=100	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=1000	(Bereich der Zeit t)
ymin=45	ymax=70	(Bereich der Funktion S)
xscl =100	yscl =5	(Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

Salzmenge:



Wasservolumen:



Differentialgleichungen: Nach der Approximation muss unserer Meinung nach zumindest der Übergang von der Differenzengleichung zu der Differentialgleichung

durchgeführt werden, um den Zusammenhang mit der Differentialrechnung herstellen zu können. Ansonst hangen die Untersuchungen für die Schülerinnen und Schüler ziemlich beziehungslos in der Luft.
Solange ein Modell nur durch eine Differenzengleichung dargestellt wird, hängt die Beschreibung der Lösung von einer willkürlichen Unterteilung des Zeitintervalls [0 , t] ab. Diese Willkür in der Modellgleichung vermeidet man mit einer Differentialgleichung (womit man sich den unfruchtbaren Streit um "Kleinheit" vom Halse schafft [1]).
Aus den Differenzengleichungen bekommt man die *mittleren Änderungsraten* im Intervall [t , t+Δt]:

$$\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$$
$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$$

Die *momentanen Änderungsraten* zur Zeit t sind:

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3 \quad \text{mit } V(0) = 900000 \text{ cm}^3$$

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54 \quad \text{mit } S(0) = 54 \text{ kg}$$

Wie weit die Differentialgleichung an dieser Stelle schon reflektiert werden kann oder soll, dürfte wohl sehr kontrovers sein. Uns scheint es jedenfalls nicht abwegig, anhand der Differentialgleichung wenigstens die Hauptaufgaben der Analysis aufzuzeigen. Dass sich die Analysis vor allem mit
– der Begründung exakter *Lösungsmethoden*,
– der *Existenz* von Lösungen,
– der *Eindeutigkeit* und den *Eigenschaften* von Lösungen,
– der Entwicklung von *Näherungsverfahren*
für Differentialgleichungen beschäftigt, kann sicher einsichtig gemacht werden.

Auf einige dieser Aufgaben kann man später – zum Abschluss der Analysis – zurückkommen.

[1] Gewöhnliche Differentialgleichungen, H.Heuser

2. Differentialrechnung

2.1 Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

Wenn man den TI-92 als Blackbox einsetzt, kann man den Schülerinnen und Schülern die Produktregel recht leicht anhand einiger Beispiele plausibel machen. Eine Unterrichtseinheit könnte etwa so ablaufen:

Übung (evtl. Einzel-/Kleingruppenarbeit):
Leiten Sie mit dem TI-92 ab:
$\sin x \cdot e^x \Rightarrow$ ____

Folgerung: Welche naheliegende Regel gilt sicher *nicht*?
____

Leiten Sie mit dem TI-92 die folgenden Funktionen ab. Versuchen Sie, eine Gesetzmässigkeit zu erkennen.
$x^2 \cdot e^x \Rightarrow$ ____
$x^3 \cdot e^x \Rightarrow$ ____
$x^4 \cdot \sin x \Rightarrow$ ____
$x^5 \cdot \cos x \Rightarrow$ ____

Formulieren Sie die Regel:
____

Testen Sie Ihre Regel an diesen Beispielen:

f(x)	Vermutetes Resultat	Resultat gemäss TI-92
$x^5 \cdot \ln x$		
$x^n \cdot \cos x$		
$\sqrt{x} \cdot \sin x$		
$\sin x \cdot \cos x$		

Mit der ganzen Klasse: „traditioneller“ Beweis

Bemerkungen:
- *d*(u(x)*v(x), x) liefert direkt die Produktregel. Gewiefte Schülerinnen und Schüler probieren evtl. direkt diese Möglichkeit aus.
- Die Quotienten- und die Kettenregel können analog eingeführt werden. ***d***(u(x) / v(x), x) liefert die Quotientenregel, der Befehl **comdenom**(...) stellt das Resultat in der traditionellen Form dar. ***d***(u(v(x)), x) wird in dieser Form vom CAS nicht ausgewertet.

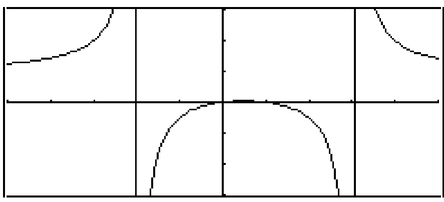
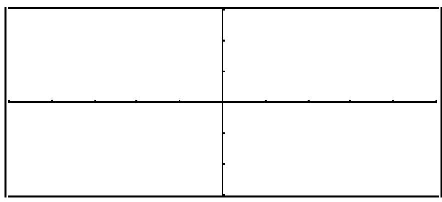
Diese Vorgehensweise klappt natürlich nur dann, wenn die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der elementaren Funktionen kennen. Und dies halten wir nach wie vor für unerlässlich.

2.2 Kurvendiskussion

Der TI-92 bietet die Möglichkeit, spezielle Punkte wie Nullstellen, Extrema usw. näherungsweise am Graphen zu bestimmen. Noch komfortabler wird es, wenn man die Kurvendiskussion mit einem einfachen Programm automatisiert. Das ganze Programm ist in unserem Skript (→ Kap. 5) angegeben; hier erläutern wir einen Auszug:

kurvdisk(funk, xv) Prgm	Name des Programmes mit den zu übergebenden Parametern: Funktionsterm und Name der unabhängigen Variablen
Local xx	Deklaration einer lokalen Variablen
DrawFunc funk | xv = x	Zeichnet den Graphen der Funktion. Der Ausschnitt wird mit ◆[WINDOW] festgelegt.
Disp „Wendepunkte" Disp „------------------"	
zeros (*d* (funk, xv, 2), xv) → xx	Speichert die Nullstellen der 2. Ableitung der vorgelegten Funktion in xx.
Disp „x-Werte „ & string (xx)	Zeigt die gefundenen x-Werte an.
Disp „y-Werte „ & string(funk | xv=xx)	Zeigt die zugehörigen y-Werte an.

Wir illustrieren die Möglichkeiten des ganzen Programmes an zwei Beispielen.

Aufruf	kurvdisk((x^2–x)/(x^2–x–6), x)	kurvdisk(tan(a*z), z)
Graph		
Nullstellen	{ 0 1 }	$\left\{\frac{@n37\cdot\pi}{a}\right\}$ (allgem. Lösung!)
Extrema	x-Werte: { 1 / 2 } y-Werte: { 1 / 25 } Max/Min: { 1 } +1:Max -1:Min sign(0): evtl. Sattel	x-Werte: { } y-Werte: { } Max/Min: { } +1:Max -1:Min sign(0): evtl. Sattel
Wendepunkte	x-Werte: { } y-Werte: { }	x-Werte: {@n38*π/a} y-Werte: { 0 }
Evtl. Asymptoten	(Ganzer Teil von:) $\frac{6}{x^2-x-6}+1$	(Ganzer Teil von:) tan(a·z)
Evtl. Pole	x = { -2, 3 }	x = { (2*@39–1)*π / (2*a) }

Damit ist die Frage nach dem künftigen Stellenwert der Kurvendiskussion aufgeworfen. Um nicht falsch verstanden zu werden: Wir halten es nach wie vor für sinnvoll, dass die Schüler und Schülerinnen z.B. wissen, dass in den Extremalstellen einer Funktion die erste Ableitung Null ist. Dies hilft etwa bei der Lösung von Extremalaufgaben. Aber wir glauben, dass in Zukunft bei der Kurvendiskussion etwas Zeit gespart werden kann.

2.3 Extremalaufgabe

Problem:

Für die Lancierung eines neuen Haushaltgeräts wurden sorgfältige Untersuchungen von einem Marktforschungsinstitut und der Kalkulationsabteilung der Produktionsfirma durchgeführt.

Verkaufspreis pro Gerät: x Fr.

Nachefragefunktion: $N(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$ mit $a,b > 0$

Produktionskostenfunktion: $K(x) = c + \frac{d}{N(x)}$ mit $c,d > 0$

Bei welchem Preis x ist der Gewinn am grössten?

CAS – Lösung:

a **e*^(– b*x^2) → n (x) ⇒ Done

c + d / n (x) → k (x) ⇒ Done

n(x)*(x – k (x)) → g (x) ⇒ Done (Gewinn)

g (x) ⇒ $-(d \cdot e^{b \cdot x^2} - a \cdot (x-c)) \cdot e^{-b \cdot x^2}$

1. Weg: Mit dem Befehl fMax:

fmax (g (x),x**)** | a>0 ⇒ x =∞ **or** x= - ∞ **or** $x = \frac{-(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} - \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}}$ **or**

$$x = \frac{(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} + \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}}$$

In dieser Auswahlsendung kommt nur das letzte Resultat als Lösung für unser Problem in Frage. Die zweitletzte Lösung ist negativ und ist schon deshalb keine Lösung für unser Problem. Man ist fertig. Das Problem ist erledigt!

2. Klassischer Weg:

zeros (***d*** **(** g (x) , x **)** , x **)** → xe ⇒ $\left\{ \frac{\sqrt{b \cdot c^2 + 2} + \sqrt{b} \cdot c}{2 \cdot \sqrt{b}} \quad \frac{-(\sqrt{b \cdot c^2 + 2} - \sqrt{b} \cdot c)}{2 \cdot \sqrt{b}} \right\}$

xe[2] < 0 ist keine Lösung.

d **(** g (x) , x , 2**)** | x = xe [1] ⇒

$$-2 \cdot a \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + 2} \cdot e^{\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b \cdot c^2 + 2} \cdot c}{2} - \frac{b \cdot c^2}{2} - 1/2} < 0 \qquad \textbf{rel. Max}$$

g (xe [1]) → Gewinn

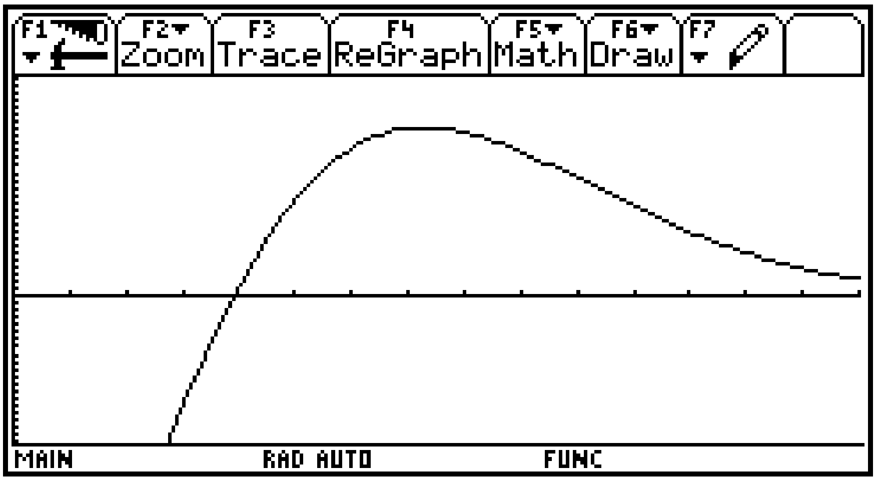
$$\Rightarrow \frac{\left(a\cdot\left(\sqrt{b\cdot c^2+2}-\sqrt{b}\cdot c\right)\cdot e^{\frac{-\sqrt{b}\cdot\sqrt{b\cdot c^2+2}\cdot c}{2}}-2\cdot\sqrt{b}\cdot e^{\frac{b\cdot c^2}{2}+1/2}\cdot d\right)\cdot e^{\frac{-b\cdot c^2}{2}-1/2}}{2\cdot\sqrt{b}}$$

Beispiel: Für die SchülerInnen dürfte eine konkrete Realisierung des Problems angemessener sein.
1 [2nd] [EE] 6 → a : 2 [2nd] [EE] –4 → b : 39 → c : 6 [2nd] [EE] 4 → d ⇒ Done
a **e*^(- b*x^2) → n (x) ⇒ Done
c + d / n (x) → k (x) ⇒ Done
n(x) * (x - k (x)) -> g (x) ⇒ Done
zeros (***d*** **(** g (x) , x **)** , x **)** → xe ⇒ {-34.168 73.168}
n (xe[2]) ⇒ 342 765
g (xe[2]) ⇒ 1.16516 E7

[WINDOW]
xmin =0 xmax =150 xscl = 10
ymin=-10000000 ymax =15000000

[HOME]

graph g (x)



Das Maximum kann auch mit dem Menu in [F5] Math bestimmt werden.

3. Integralrechnung

3.1 TI-92 – Funktion „Integral“

Das bestimmte Integral kann folgendermassen gebildet werden:

1. Unterteile [a, b] in n Teilintervalle: $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, i = 0,1,\ldots,n$.
2. Bilde die Rechtssumme $R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.
3. Bilde $\lim_{n\to\infty} R_n$.

Eine einfache TI-92-Funktion (→ Skript S. 48) versucht, ein bestimmtes Integral auf diesem Weg zu berechnen. Diese Funktion liefert z.B.

integral(x^2, x, a, b)	$\Rightarrow \frac{-a^3}{3}+\frac{b^3}{3}$
integral(g*t, t, a, b)	$\Rightarrow -\frac{a^2\cdot g}{2}+\frac{b^2\cdot g}{2}$
integral(e^(c*x), x, a, b)	$\Rightarrow \frac{-e^{a\cdot c}}{c}+\frac{e^{b\cdot c}}{c}$
integral(sin(x), x, 0, π)	gelingt nicht

Damit können schon ohne Kenntnis des Hauptsatzes wesentlich mehr bestimmte Integrale berechnet werden als dies ohne CAS üblich war. Auch Funktionen mit Parametern können bearbeitet werden. Zudem kann diese selbergestrickte Funktion zur Motivation und Vorbereitung des Hauptsatzes verwendet werden.

3.2 Flächenberechnungen

Vermutlich kennen Sie die folgende Aufgabe und wissen, wie anspruchsvoll ihre manuelle Lösung ist:

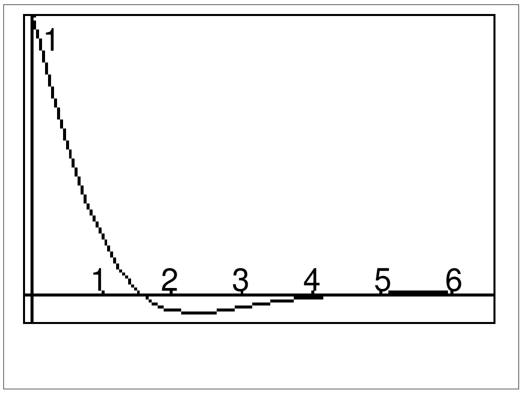
Wie gross ist der Gesamtinhalt aller Flächenstücke zwischen der x-Achse und der Kurve k: $y=e^{-x}\cdot\cos x$, $x\geq 0$?

Diese Aufgabe wird in 1½ Minuten numerisch gelöst, indem die Betragsfunktion von 0 bis ∞ integriert wird:

∫(abs(e^(–x)*cos(x)), x, 0, ∞) ⇒ 0.717269

Warning: Overflow replaced by ∞ or –∞

Damit wird die Aufgabe trivialisiert.



Wenn aber Wert auf die exakte Lösung $\frac{1+2e^{-\pi/2}-e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$ gelegt wird, die der TI-92 nicht „einfach so“ findet, müssen nach wie vor alle Überlegungen angestellt werden. Das CAS nimmt dem Schüler nur noch die Berechnungen ab. Also: Je nachdem, wie diese Aufgabe gestellt wird, ist sie entweder trivial – oder erfordert nach wie vor einiges zu ihrer Lösung. Dieses Beispiel zeigt sehr schön, dass es für den optimalen Einsatz eines CAS wichtig ist, seine Möglichkeiten und Grenzen genau zu kennen.

3.3 Die Fähigkeiten des TI-92 beim Integrieren

Die Fähigkeiten des TI-92 beim Integrieren sind insgesamt wirklich gut. Die meisten Funktionen werden völlig problemlos integriert:

$$\int \frac{x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 9x^3 + 5x - 3}{x^5 + x^4 - x - 1}\,dx \;\Rightarrow\; \ln|x-1| + 3\cdot\tan^{-1}(x) - \frac{4}{x+1} + \frac{x^2}{2} - 3x$$

Wir sind lediglich auf eine einzige elementar integrierbare Funktion gestossen, zu welcher keine Stammfunktion gefunden wird: sin(ln x).

Umso überraschender ist es, dass bei der Berechnung von bestimmten Integralen manchmal Schwierigkeiten auftreten:

$$\int_0^1 \left(-\frac{x^{10}}{120} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} - x^2 + 1 \right) dx \;\Rightarrow\; \text{... nach über 5 Stunden...}\; \frac{31049}{41580}$$

Eine kleine Änderung des Integranden (z.B. Änderung aller Vorzeichen auf +) oder der Integrationsgrenzen (die 0 scheint die Schwierigkeiten mit zu verursachen) führt dazu, dass die entsprechende Aufgabe wieder anstandslos gelöst wird.

Dieses Beispiel zeigt zum einen, wie Probleme des CAS oft überraschend auftreten. Zum andern wird deutlich, dass solche Probleme manchmal umgangen werden können – hier zum Beispiel mit Hilfe des Hauptsatzes, weil der Rechner problemlos eine Stammfunktion findet. Wer solche Schwierigkeitn didaktisch ausnützen will, braucht sehr genaue Kenntnisse des implementierten CAS.

4. Differentialgleichungen

4.1 Richtungsfeld mit Lösungskurve

Eine eindrückliche mathematische Deutung einer Differentialgleichung ergibt das Richtungsfeld, das wir noch für unser 3. Modell Salzen - Entleeren betrachten wollen.

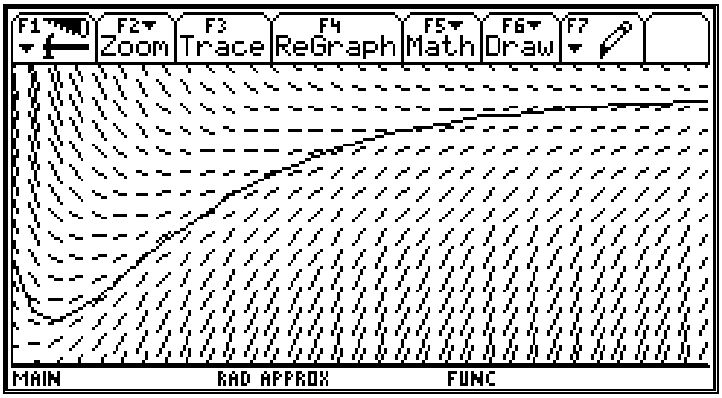
Volumen: $V'(t) = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$ mit $V(0) = 900000\ \mathrm{cm}^3$

Salzmenge: $S'(t) = -\dfrac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$ mit $S(0) = 54\ \mathrm{kg}$

Mit dem TI-92 kann man relativ einfach ein kleines Programm (→ Skript) für das Richtungsfeld einer Differentialgleichung (oder auch eines Systems) erstellen.

Aufruf: [HOME] [MODE] Graph........ SEQUENCE → 1: FUNCTION
[F2] Exact / Approx....AUTO → APPROXIMATE

Demonstration:
DiffSyst(-12*√(x)+18000, -12*y/√(x)+0.54, t, x, y, 0,1000, 45, 70, 900000,54)



Die grundsätzliche Aufgabe bei einer Differentialgleichung ist offensichtlich, wenn man ihr Richtungsfeld betrachtet: "Finde Kurven, die sich in das Richtungsfeld einschmiegen " oder genauer: *Finde Kurven, die in jedem ihrer Punkte tangential an das Richtungsfeld sind.* Eine solche Kurve heisst Lösungskurve; die Funktion, deren Bild die Kurve ist, nennt man *Lösung der Differentialgleichung.*

Folgerungen:

1. Es gibt viele Lösungskurven, d.h. es gibt viele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung.
2. Durch einen Punkt P(t_0, y_0) gibt es genau eine Lösungskurve. Das bedeutet: Kennt man zu einem Zeitpunkt den Zustand, so ist der ganze Verlauf des Prozesses,vor- und rückwärts, bestimmt.
3. Die Idee des Richtungsfeldes legt auch das Verfahren von Euler-Cauchy nahe, um von einem gegebenen Punkt aus einen neuen Punkt der Lösungskurve zu approximieren.

5. Hinweis auf unser Skript

Dieses Referat behandelte einen Teil unserer Arbeit zur Analysis, die wir in einem Skript zusammengestellt haben. Hier dessen Inhaltsverzeichnis:

Einige Bemerkungen zum Anhang des Skripts:

– Wir haben bei unserer Arbeit mit dem TI-92 viele schöne Überraschungen erlebt und ein paar weniger schöne. Letztere haben wir zu einer Problemliste zusammengestellt. Wer demnächst ein bestimmtes Kapitel behandelt, kann nachschlagen, welche Überraschungen dabei auftreten können. Manche Probleme treten auch bei grösseren CAS auf.
– Sie finden auch eine Aufstellung, die zeigt, was von Mittelschulstoff unserer Meinung nach wichtig bleibt und was durch den Einsatz eines permanent verfügbaren CAS an Bedeutung verlieren wird.
– Schliesslich stossen Sie auf eine kurze Auswertung unseres zweiwöchigen Schulversuchs. Vielleicht finden Sie auch dort einige nützliche Informationen.

Das ganze Skript enthält 90 Seiten. Es kann zum Selbstkostenpreis von DEM 20.— (inkl. Porto, bitte einen 20-Markschein einsenden) bezogen werden bei

ETH Zürich
Departement Mathematik
z.H.v. Frau G. Gassmann
TI-92 – Skript
Rämistrasse 101
CH – 8092 Zürich

Korrekturen zum Skript

S. 36, 2. Spalte, 2. Zeile	Richtig ist: zeros(*d*(funk, xv, 2), xv) → xx
S. 76, Problem E.4	Der TI-92 gibt zusätzlich die Warnung „Questionable solution“ aus.
S. 80, Problem I.8	Beim 2. Beispiel wird ausgegeben: $\frac{-a \cdot a^n}{n+1} + \frac{b \cdot b^n}{n+1}$