ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Analysis

mit dem Computer-Algebra-System des TI-92

Teil 1:
Modell – Realität

Beat Eicke und Edmund Holzherr
11. November 1997

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

INHALT

Seite

Vorwort

Ein graphikfähiger Taschenrechner mit einem Computer-Algebra-System (CAS) ist eine Herausforderung und Chance, um Mathematik und Mathematikunterricht am Gymnasium von Grund auf neu zu überdenken. Bald werden alle SchülerInnen permanent über ein CAS verfügen. Dadurch kann manches realisiert werden, das bisher kaum oder nur mit erheblichem Aufwand möglich war.

Wir stellten uns deshalb die Aufgabe, einen Analysisunterricht mit konsequentem Einsatz des TI-92 zu entwerfen. Wir wollten anhand eines konkreten Themas einerseits aufzeigen, wie die Möglichkeiten des TI-92 genutzt werden können. Andererseits wollten wir andeuten, welches Wissen und welche algebraischen Fertigkeiten für die SchülerInnen auch in Zukunft unverzichtbar sein werden, und was früher oder später einmal kaum noch einen grossen Stellenwert haben dürfte. Eine abschliessende Antwort auf die Frage „Wie viele Termumformungen braucht der Mensch im Zeitalter von CAS ?“ ist zum jetzigen Zeitpunkt aber sicher noch nicht möglich.

Wir wollten und konnten kein neues didaktisches Konzept des Analysisunterrichts entwickeln. Diese äusserst anspruchsvolle Aufgabe bedarf begnadeter MathematiklehrerInnen und der sorgfältigen Evaluation von mehrjährigen und breit abgestützen Erfahrungen mit dem neuen Werkzeug.
Die Bedeutung des CAS für die Mathematik kann man aber nur abschätzen, wenn man ein grösseres Teilgebiet betrachtet. Wir haben uns daher für einen denkbaren Aufbau der Analysis entschieden, um die Möglichkeiten des TI-92 und die Auswirkungen der steten Verfügbarkeit des CAS im Unterricht deutlich zu machen. Andernfalls wäre nur eine Aneinanderreihung von Einzelproblemen entstanden, die keinen Überblick erlaubt hätte. Aus dem gleichen Grund verzichteten wir bewusst auf die Entwicklung ausgefeilter Unterrichtssequenzen für besonders heikle didaktische Probleme. Sie hätte unsere Zielsetzung nur unnötig stark belastet.

Wir hoffen, dass unsere Arbeit viele Kolleginnen und Kollegen dazu anregt, über den Einsatz von CAS - und damit auch über ihren Unterricht - nachzudenken.

TI-92 - Notationen

Wir haben folgende Notationen bei Berechnungen mit dem TI-92 verwendet:

→ oder auch –>	bedeutet, dass die Taste $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ zu drücken ist
⇒	Nach einem Doppelpfeil folgt stets ein Resultat des TI-92.

Aufgaben

Wir haben keine Sammlung mit neuen oder gar revolutionären Aufgaben herausgeben wollen. Trotzdem haben wir ab und zu einige Vorschläge eingetreut, um zu zeigen, welche Aufgabentypen (nach wie vor) verwendet werden könnten, weil sie durch den Einsatz des CAS nicht völlig trivialisiert werden, sondern durchaus noch einige mathematische Kenntnisse voraussetzen.

Voraussetzungen

Die folgenden mathematischen Grundlagen werden vorausgesetzt:

- Folgen und Reihen
- Rekursive Folge
- Heuristischer Grenzwertbegriff

Dank

Unsere Arbeit entstand während eines Gastaufenthaltes an der ETH Zürich im Rahmen des Programms „ETH für die Schule“. Wir danken Herrn Prof. Dr. Urs Kirchgraber für die Einladung und für die engagierte Begleitung. Seine Ratschläge waren für uns oft wertvoll. Zu Dank verpflichtet sind wir auch Herrn Dr. Werner Hartmann, der uns bei der Planung des Projekts behilflich war und Herrn Otto M. Keiser für die Durchsicht unseres Skriptes. Danken möchten wir zudem

- Herrn Heiko Knechtel aus Bückedorf (D), der uns einen umfassenden Einblick in die Schulversuche des Landes Niedersachsen gewährte und uns während des Besuches sehr angenehm betreute;
- Herrn Dr. René Hugelshofer, der uns zu einem Schulbesuch empfing;
- Herrn Pierre Bula von Texas Instruments, der uns während mehrerer Wochen einen Klassensatz von TI-92 leihweise zur Verfügung stellte;
- Frau Lenda Hill vom TI Calculator Team für die Stellungsnahmen zu den meisten der eingereichten Probleme

sowie allen Kollegen, die uns in irgendeiner Art und Weise unterstützt haben.

1. Modell-Realität

1.1 Wozu ?

Ich behaupte sogar, dass in jeder besonderen Naturlehre nur soviel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.

Immanuel Kant
"Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft"

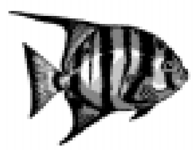
Wie kann die Behauptung eines der grössten Philosophen aus heutiger Sicht verstanden werden?
Bei der Beobachtung von vielen Vorgängen in der Natur, der Medizin, der Wirtschaft, der Technik und der Gesellschaft können Gesetzmässigkeiten erkannt werden. Die Grössen, die den Zustand eines Vorgangs beschreiben, verändern sich mit der Zeit. Einen solchen Vorgang nennt man einen *Prozess.*

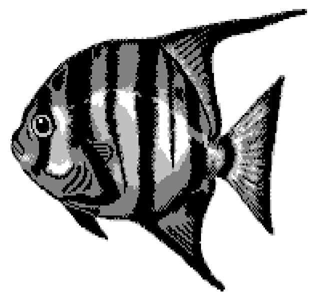
Dazu einige Beispiele:

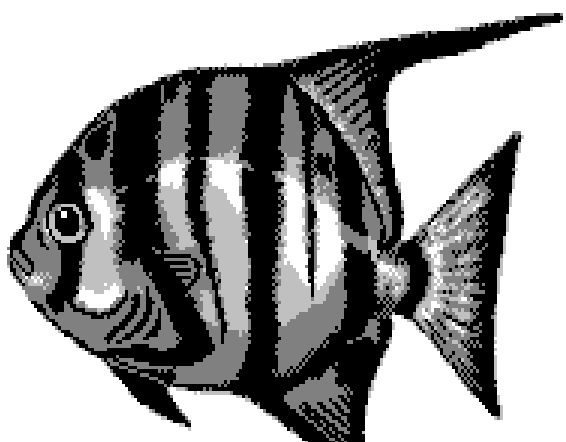
- Bewegungen im Schwerefeld der Erde
- Abbau von Medikamenten im Körper
- Wachstum von Bakterienkulturen
- Verbreitung von Informationen usw.

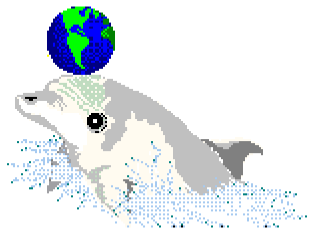
Durch Vereinfachungen und sinnvolle Annahmen über die Veränderung der Zustandsgrösse eines Prozesses in einem sehr kleinen Zeitintervall erhält man mit Hilfe der Differentialrechnung oft brauchbare bis sehr gute Modelle für den realen Vorgang. Mit solchen Modellen kann ein Menschheitstraum verwirklicht werden: ***man kann die Zukunft prognostizieren!***

Mit der Untersuchung von einfachen Modellen, die für Schülerprojekte besonders gut variiert oder ausgebaut werden können, wollen wir eine Motivation für den Einstieg in die Differentialrechnung geben.









Meerwasser-Aquarium

In ein Meerwasseraquarium (erwünschter Salzgehalt ca. 3.5%) wurde versehentlich Wasser mit einem Salzgehalt von q% eingefüllt. Das Missgeschick kann auf verschiedene Arten, die zudem von der Ausgangssituation abhängen, korrigiert werden.

1. Nachsalzen

Es wurde versehentlich Süsswasser ($q=0$) eingefüllt. Der Fehler wird korrigiert, indem man nun während einer gewissen Zeit Meerwasser einleitet und gleichzeitig die gleiche Menge Aquariumwasser durch den Überlauf ableitet. Wie wächst die Salzmenge im Aquarium ?

2. Entleeren

Nachdem man den Fehler bemerkt hat, wird das Aquarium durch einen Abfluss im Boden des Aquariums entleert, um danach das Aquarium mit Meerwasser wieder aufzufüllen. Wie lange dauert es, bis das Aquarium zur Hälfte bzw. völlig entleert ist ?

Alternativen: *Variation der geometrischen Form des Gefässes.*
a) Trichter b) Liegendes Dreiecksprisma c) Liegende Dreieckspyramide usw.

3. Salzen - Entleeren

Man bemerkt den Fehler, nachdem das Aquarium zu einem Drittel gefüllt ist. Um nun das Missgeschick zu korrigieren, öffnet man den Ablauf und leitet gleichzeitig $z\ \ell$ Salzwasser pro Sekunde mit einem Salzgehalt von p% in das Aquarium. Wie verändert sich das Wasservolumen und die Salzmenge im Aquarium ?

Speziallfälle

- $z = 0$ — *d. h.. kein Zufluss* — *Entleeren*
- z = *Abfluss* *und* $q = 0$ — *einfaches Nachsalzen:* *Wachstumsprozess*
- z = *Abfluss* *und* $p = 0$ — *einfaches Entsalzen:* *Zerfallsprozess*

- *Durch den Ablauf werden konstant $a\ \ell$ Aquariumwasser pro Sekunde abgepumpt (abgelassen).*

  a) $a < z$ *und* $p < q$ — *Entsalzen und Füllen des Aquariums*
  b) $a < z$ *und* $p > q$ — *Nachsalzen und Füllen des Aquariums*
  c) *Inhaltliche Variation* — *Forellenteich in 4.1.2*

  d) $a = z$ *un d* $q = 0$ — *einfaches Nachsalzen:* *Wachstumsprozess*
  e) $a = z$ *und* $p = 0$ — *einfaches Entsalzen:* *Zerfallsprozess*

1.2 Modelle

1.2.1 Nachsalzen

MODELLIERUNG*:*
Das Aquarium enthält V_o= 2700 ℓ Süsswasser. Pro Minute fliessen z = 18 kg der Salzlösung mit einem Salzgehalt von p% = 3.5 % in das Aquarium. Durch den Überlauf fliesst die gleich Menge Aquariumwasser ab.

Modellannahmen:
- Die Einleitung des Wassers garantiert, dass die Salzkonzentration im Aquarium stets homogen ist, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleich viel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgeschöpft und danach wird das Aquarium wieder mit der gleichen Menge Meerwasser aufgefüllt.
- 1 kg Wasser bzw. Salzlösung ist gleich 1 ℓ Wasser bzw. Salzlösung.

Mit S (t) bezeichnen wir die Salzmenge in kg, die im Aquarium zum Zeitpunkt t (min) vorhanden ist. S ist also die Funktion, die in jedem Zeitpunkt t angibt, wieviel Salz im Aquariumwasser vorhanden ist.

Auftrag: Untersuche die Salzmenge im Aquarium.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S :
- $S(0) = 0$
- $S(t) \geq 0$
- S ist eine *streng monoton wachsende* Funktion
- $S(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{p}{100} \cdot V_o = 94.5$
- Definitionsbereich |D : $t \geq 0$
- Wertebereich |W: $0 \leq S(t) < 94.5$
- Vermutung: S wird immer langsamer zunehmen

Aufgrund dieser Eigenschaften kann der Graph der Funktion S skizziert werden.

Manuelle Näherungen :
Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle.

Zeitintervall[1]: 2 Minuten
In je 2 Minuten werden $18 \cdot 2\ dm^3 = 36\ dm^3$ Aquariumwasser abgeschöpft und durch die gleiche Menge Meerwasser ersetzt.

1. Zeitintervall [0 , 2]

Salzverlust : 0 Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$

Salzmenge nach 2 Minuten: $S(2) = 0 + 1.26 = 1.26$

2. Zeitintervall [2 , 4]

Salzverlust : $z \cdot \frac{S(2)}{V_O} \cdot 2 = 0.0168$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$

Salzmenge nach 4 Minuten: $S(4) = 1.26 - 0.0168 + 1.26 = 2.5032$

3. Zeitintervall [4 , 6]

Salzverlust : $z \cdot \frac{S(4)}{V_O} \cdot 2 = 0.033376$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 1.26$

Salzmenge nach 6 Minuten: $S(6) = 2.5032 - 0.033376 + 1.26 = 3.72982$

usw.

Der Rechenaufwand für eine brauchbare manuelle Approximation mit einer kleinen Zeitintervallänge Δt ist im allgemeinen riesig gross. Der Computer kann uns diese Arbeit abnehmen. Dazu verallgemeinern wir zuerst unsere Näherungsmethode.

---

[1]Bemerkung: Die Wahl eines Zeitintervalls mit der Länge 1 kann den math. Zusammenhang verdecken.

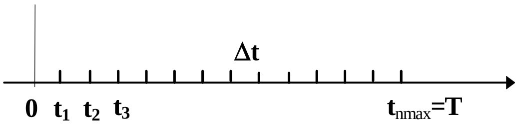
Allgemeine Approximation:
Wir betrachten den Zuwachs der Salzmenge in einem sehr kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$:

Salzmenge zum Zeitpunkt 0:	$S(0) = 0$
Salzverlust im Intervall $[t, t+\Delta t]$:	$\approx z \cdot \frac{S(t)}{V_0} \Delta t = S(t) \cdot \frac{1}{150} \cdot \Delta t$
Salzzuwachs im Interrvall $[t, t+\Delta t]$:	$z \cdot \frac{p}{100} \cdot \Delta t = 0.63 \cdot \Delta t$

Salzmenge zum Zeitpunkt $t + \Delta t$: $\quad S(t+\Delta t) \approx S(t) - S(t)\,\frac{1}{150}\,\Delta t + 0.63 \cdot \Delta t \qquad (1)$

Approximation mit dem Computer

Wir wollen nun herausfinden, wann der Salzgehalt im Aquarium auf 2% gestiegen ist. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 600 min in nmax = 1000 gleichlange Intervalle.
Von $S(t_0) = S(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von S jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Lösung ist der Wert von t, bei dem S (t) möglichst nahe bei $0.02 \cdot 2700 = 54$ liegt.



Aus der Gleichung (1) für $t = t_{n-1}$ und $t + \Delta t = t_n$ folgt:
$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{150} \cdot \Delta t\right) + .63 \cdot \Delta t$

nmax = 1000 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / nmax = .6$ und
$t_n = n \cdot \Delta t = T \cdot n / nmax = .6 \cdot n$ mit $n = 0,1,\ldots,1000$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE

[Y=]

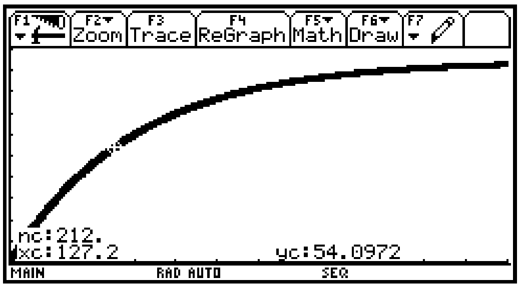
u1 (n) = .6*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-.6/150)+ .63* .6	(Salzmenge: $S(t_n)$)
ui2 = 0	(Salzmenge: $S(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Salzmenge: $S(t_n)$)

[WINDOW]

nmin = 0	nmax=1000	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=600	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=100	(Bereich der Funktion S)
xscl = 50	yscl =10	(Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

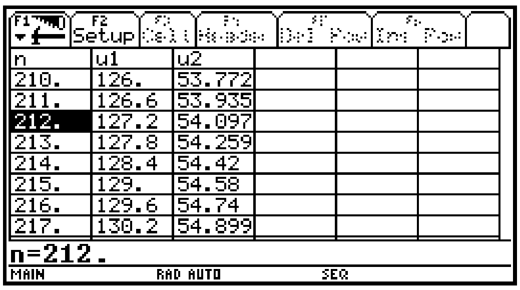


Resultat: Nach nc=212 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=127.2 Minuten, ist der Salzgehalt im Aquarium auf ca. 2% angestiegen.

Alternative:

[TblSet] tblStart: 210 Δtbl : 1
(Startnummer) (Schrittweite)

[TABLE]



n	u1	u2
210.	126.	53.772
211.	126.6	53.935
212.	127.2	54.097
213.	127.8	54.259
214.	128.4	54.42
215.	129.	54.58
216.	129.6	54.74
217.	130.2	54.899

n=212.

Aufgaben
Genauigkeit: Untersuche die Näherungslösung für nmax= 1500, 2000, 3000. Welche Schlüsse kann man aus den Ergebnissen ziehen ?

Differentialgleichung

Solange ein Modell nur durch eine Differenzengleichung dargestellt wird, hängt die Beschreibung der Lösung von einer willkürlichen Unterteilung des Zeitintervalls [0 , t] ab.
Diese Willkür in der Modellgleichung (1) vermeidet man mit einer Differentialgleichung (womit man sich den unfruchtbaren Streit um "Kleinheit" vom Halse schafft [2]).

MITTLERE ÄNDERUNGSRATE
Mit der Gleichung (1) erhalten wir:

Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Zeitintervall [t , t+Δt] ist :

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -S(t)\,\frac{1}{150} + 0.63$$

Damit ergibt sich :

Die **momentane Änderungsrate** der Salzmenge zur Zeit t ist :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = S'(t) = -S(t)\,\frac{1}{150} + 0.63 \qquad (2)$$

Was haben wir mit dieser Differentialgleichung erreicht ?
Die Salzmenge in der Lösung zum Zeitpunkt t können wir mit einer Gleichung beschreiben, die nicht von einem willkürlich kleinen Δt abhängt. Das Modell wird durch eine eindeutig bestimmte Gleichung beschrieben, deren Lösungen Funktionen S sind.

Bei der Beschreibung eines Prozesses in einem kleinen Intervall werden oft Vereinfachungen getroffen oder gewisse Einflüsse vernachlässigt. Überschreiten diese Annahmen ein erträgliches Mass, so wird die Differentialgleichung kein hinreichend genaues Modell des Prozesses im Kleinen mehr sein, und die Lösungen der Differentialgleichung beschreiben auch nicht mehr den realen Prozess. Daher sind die Lösungen stets mit der Wirklichkeit zu vergleichen. Sind die Abweichungen der Lösungen von der Wirklichkeit zu gravierend, so muss das Modell verfeinert oder ganz verworfen werden.

Eine der Hauptaufgaben der Analysis ist es, Aussagen über die Lösungen von Differentialgleichungen zu machen.

Die Analysis beschäftigt sich vor allem mit
- der Begründung exakter **Lösungsmethoden**,
- der **Existenz** von Lösungen,
- der **Eindeutigkeit** und den **Eigenschaften** der Lösungen,
- der Entwicklung von **Näherungsverfahren** für die Lösungen.

Wir werden später noch auf einige dieser Aufgaben zurückkommen.

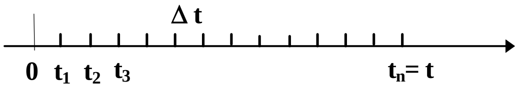
Modellkritik:
- Die homogene Salzverteilung dürfte nicht leicht realisierbar sein.
- Hingegen sind Annahmen für inhomogene Salzverteilungen schwierig zu formulieren.

[2] Gewöhnliche Differentialgleichungen , H.Heuser

Exakte Lösung:

Unser Nachsalzungsmodell ist ein besonderer Glücksfall. Wir können die mathematisch exakte Lösung S (t) des Problems direkt aus der Differenzengleichung bestimmen.

Wir wählen für das Zeitintervall [0, t] die folgende Unterteilung in n Teilintervalle:



$t_i = \frac{t \cdot i}{n}$ $\quad i = 0, 1, 2, 3...., n \quad$ und $\quad \Delta t = \frac{t}{n}$

Mit Hilfe der Gleichung (1) erhalten wir :

$S(t_{i-1} + \Delta t) = S(t_i) \approx S(t_{i-1}) \cdot (1 - \Delta t/150) + .63 \cdot \Delta t$ und $S(0) = 0$.

Zur Vereinfachung ersetzten wir: $z = 1 - \Delta t / 150$ und $A = 0.63 \cdot \Delta t$ also ist $S(t_i) \approx S(t_{i-1}) \cdot z + A$.

$S(t_0 + \Delta t) = S(t_1) \approx A$

$S(t_1 + \Delta t) = S(t_2) \approx S(t_1) \cdot z + A = A \cdot z + A = A(z+1)$

...

$$S(t_n) = S(t) \approx A(1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^{n-1}) = A \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0.63 \cdot \Delta t \frac{1 - (1 - \Delta t / 150)^n}{\Delta t / 150}$$

$$S(t_n) = S(t) \approx 94.5 (1 - (1 - \Delta t / 150)^n) = 94.5 \left(1 - \left(1 - \frac{t/150}{n}\right)^n\right)$$

CAS - HERLEITUNG:

Define s (i) = **when (** i = 0 , 0, s (i -1)* z + a **)** $\Rightarrow$ Done

seq (s (i), i, 0, 5, 1**)** $\Rightarrow$ $\{ 0 \quad a \quad a \cdot z + a \quad a \cdot (z^2+z+1) \quad a \cdot (z^3 + z^2 + z + 1) \quad a \cdot (z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) \}$

factor(a***Σ(** z^i,i,0,n-1**))** $\Rightarrow$ $\frac{a \cdot (z^n - 1)}{z - 1}$

ans (1 **)** | z = 1 - (t /150) / n) **and** a = .63 · t / n [◆] [ENTER] $\Rightarrow$ $-94.5 \cdot \left(\left(\frac{-.006667 \cdot (t - 150. n)}{n}\right)^n - 1\right)$

Bemerkungen:
- Ohne die Vereinfachungen rechnet sich das CAS ins Abseits.
- Die Gross- /Kleinschreibung wird bei Befehlen und Variablennamen nicht unterschieden.
- Eingabe von Σ: [2nd] **Σ** oder [◆] [G] [↑] [S]
- Die Teilsumme der geometrische Reihe wird für konkrete n nicht erkannt.
- Der max. Wert für i in seq( ), der kein Memory - Error liefert ist 26 !!
- Das exakte Schlussresultat würde ziemlich unübersichtlich dargestellt. Daher wird mit [◆] [ENTER] ein Näherungswert berechnet.

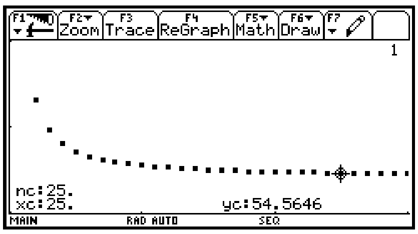
Mit dem TI-92 untersuchen wir die gefundene Formel nach t_n = 127 min für verschiedene n.

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE

[◆] [Y=]
u1 (n) = 94.5 * (1 - (1 - (127/150) / n) ^ n)
ui1 = 0

[◆] [WINDOW] nmin=0 nmax= 30
xmin=0 xmax=30 xscl = 10
ymin=50 ymax=70 yscl = 10

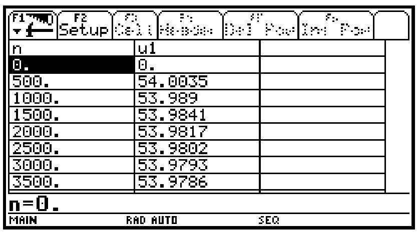
[◆] [GRAPH]



[◆] [TblSet] tblStart: 0 Δtbl : 500

[◆] [TABLE]

[◆] [F] Cell Width 12 (Zellbreite)



[MODE] Display Digits......FLOAT 12 (Stellenzahl erhöhen)
Vorsicht: Die Berechnung ist sehr viel langsamer !

Mit [MODE] [F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE werden die Berechnungen schneller.

Schnellere Alternativen:

[HOME]

Define u (n) = **when (**n=0,0, 94.5*(1- (1- (127/150) / n)^n) **)** **seq(** u(n), n, 0, 4000, 500 **)**

[HOME] 94.5*(1- (1- (127/150) / n)^n) | n = {500, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000}

[MODE] Graph........SEQUENCE-> 1: FUNCTION

[HOME] 94.5*(1 - (1- (127/150) /n)^n) | n ≥1 -> a (n) **graph** a (n) , n oder

[TblSet] tblStart: 1000 Δtbl : 1000

[TABLE]

Resultat: S (127) scheint sich "einzupendeln" ; die Formel scheint "stabil" zu sein.

Wir haben also einen bequemen Weg zur Berechnung einer Näherungslösung gefunden.

Mit dem **Limit**-Befehl[3] des CAS kann man den Grenzwert bestimmen:

limit ((1 - (t / 150) / n) ^ n, n, ∞**)** ⇒ **undef** ***Fehler des TI-92 !***

limit ((1- (t /v) / n) ^ n, n, ∞**)** ⇒ $e^{-\frac{t}{v}}$

Für den Grenzwert gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} 94.5\left(1 - \left(1 - \frac{(t/150)}{n}\right)^n\right) = 94.5\cdot\left(1 - e^{-\frac{t}{150}}\right) = S(t) \qquad (3)$$

Damit können wir die Zeit für die Erreichung von 2 % Salzgehalt im Aquarium direkt berechnen.

zeros (189/2*(1 - *e*^(-t / 150)) - 54, t **)** ⇒ { 150 ln (7 / 3) }

Eine Näherung bekommt man mit :

[ENTER] ⇒ { 127.095 }

Bemerkungen: **solve(** 94.5*(1 - *e*^(-t / 150)) =54, t **)** ⇒ false, ***d. h. keine Lösung !***

Warning:Memory full, simplification might be incomplete

solve(94.5*(1 - *e*^(-t / 150)) -54=0, t **)** ⇒ t = 127.095 ***kein Problem !***

solve(189/2*(1 - *e*^(-t / v)) =54, t **)** ⇒ t = v · ln (7 / 3) ***kein Problem !***

Aufgaben:

Untersuche mit dem CAS die Funktion (3).

a) Bestimme die mittlere Änderungsrate für das Intervall [t , t+Δt] .
b) Bestimme den Grenzwert (Δt → 0) für die mittlere Änderungsrate zum Zeitpunkt t.
c) Setze den Grenzwert und die Funktion (3) in die Differentialgleichung (2) ein, und überprüfe so, dass die Funktion (3) die Gleichung (2) erfüllt.

Nun wollen wir das Entleerungsmodell untersuchen.

---

[3] Wann bestimmt der TI-92 den Grenzwert richtig ?

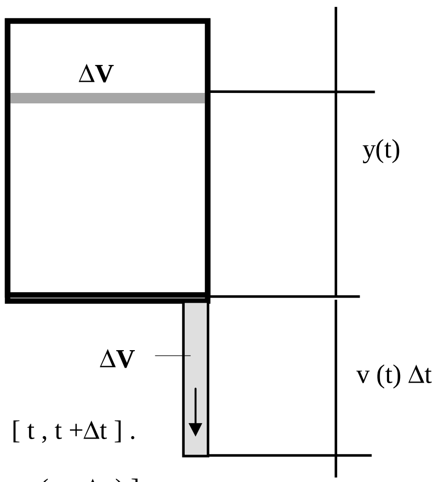
limit ((1- (t /v)/ n)^n, n,∞**)** | v = {95, 96, 97, 98, 99, 100} ⇒ { $e^{-\frac{t}{95}}$ 0 $e^{-\frac{t}{97}}$ undef undef ∞ }

1.2.2 Entleeren

MODELLIERUNG:
Das Aquarium ist l =180 cm lang, b=100 cm breit und h=150 cm hoch. In der Grundfläche befindet sich ein Abfluss mit einem Querschnitt Q = 36 cm^2. Zur Zeit t = 0 ist das Aquarium bis zum Rand gefüllt. Die Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t (Sek.) ist y (t) in cm.

Auftrag: Untersuche die Ausfliesszeit.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion y abgeleitet werden.



Eigenschaften von y:
- $y(0) = 150$ und $y(t) \geq 0$
- y ist eine *monoton fallende* Funktion
- $\exists\, t_0$ mit $y(t_0) = 0$ und $y(t) > 0 \ \ \forall\, t < t_0$; $\mathbb{W} : 0 \leq y(t) \leq 150$
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ mit $y(t) = 0 \ \ \forall\, t \geq t_0$
- Vermutung: Der Wasserspiegel fällt immer langsamer

Aufgrund dieser Eigenschaften kann der Graph der Funktion S skizziert werden.

Gesetz von Torricelli
Unter der Annahme, dass g = 1000 cm $\cdot$ s^{-2} ist, gilt für die Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}$ cm / s.

Wir betrachten die Volumenänderung in einem sehr kleinen Zeitintervall $[\, t , t+\Delta t\,]$.

Volumenabnahme im Behälter : $l \cdot b \cdot [\, y(t) - y(t+\Delta t)\,] = 18000\,[\, y(t) - y(t+\Delta t)\,]$
Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx Q\ v(t)\,\Delta t = 36 \cdot 20 \cdot \sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}\ \Delta t$

CAS: 18000* (y (t) - y (t +Δt)) = 36 *20 * $\sqrt{5}$ * $\sqrt{y(t)}$ * Δt

ans (1) *(-1) / Δt / 18000 $\Rightarrow \dfrac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \dfrac{-\sqrt{5\cdot y(t)}}{25}$

Die **mittlere Änderungsrate** (mittlere Sinkgeschwindigkeit) des Wasserspiegels im Intervall $[\, t , t+\Delta t\,]$ ist:

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)} \qquad (4)$$

Aufgaben:
- Bestimme manuell für eine Zeitintervallänge von 0.5 s Näherungen für y (0.5) und y (1).
- Versuche mit dem CAS wie beim 1. Modell eine exakte Lösung mit der Differenzengleichung (4) zu bestimmen.

Die Gleichung für die **momentane Änderungsrate** der Wasserspiegelhöhe (Sinkgeschwindigkeit) zur Zeit t ist also:

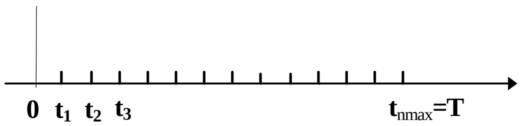
$$\boxed{y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -\frac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)}} \qquad (5)$$

Beachte: Die exakte Lösung kann man nicht mehr wie beim 1.Modell aus der Differenzengleichung herleiten.

Approximation mit dem Computer

Wir wollen nun herausfinden, wie lange es dauert, bis das Aquarium leer ist. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 500 s in nmax =100 gleichlange Intervalle.
Von $y(t_0) = y(0) = 150$ ausgehend, approximieren wir den Funktionswert $y(t_1)$, dann $y(t_2)$ etc. Lösung ist der Wert von t, bei dem y (t) möglichst nahe bei 0 liegt.

Die Näherung (4) formen wir zuerst um zu : $y(t+\Delta t) \approx y(t) - \dfrac{\sqrt{5\cdot y(t)}}{25}\,\Delta t$



Die Unterteilung für nmax = 100 ist : $\Delta t = 500 / 100 = 5$
$t_n = \Delta t \cdot n = 5 \cdot n$, n = 0,1,...,100

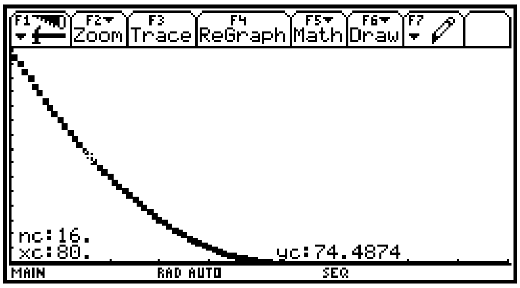
Damit erhalten wir : $y(t_n) \approx y(t_{n-1}) - \dfrac{\sqrt{5\cdot y(t_{n-1})}}{5}$

Einstellung: [MODE] Graph.....FUNCTION->4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx....AUTO -> 3:APPROXIMATE (Berechnungen werden wesentlich schneller.)

◆ [Y=]

u1 (n) = 5*n (Zeit: t_n)
u2(n) = u2(n-1) - √ (5*u2(n-1)) /5 (Höhe: y (t_n))
ui2 = 150 (Höhe: y (t_0))

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Höhe: y (t_n))



◆ [WINDOW]

nmin = 0 nmax=100 (Bereich : Nummern)
xmin=0 xmax=500 (Bereich der Zeit t)
ymin=0 ymax=150 (Bereich der Funktion y)
xscl=50 yscl=10 (Achsenteilungen)

◆ [GRAPH]

◆ [TblSet] tblStart: 47 Δtbl : 1
(Startnummer) (Schrittweite)

◆ [TABLE]

n	u1	u2
47.	235.	2.2606
48.	240.	1.5882
49.	245.	1.0246
50.	250.	.57193
51.	255.	.23372
52.	260.	.01752
53.	265.	-.0417
54.	270.	undef

n=52.

Resultat: Nach nc=16 Zeiteinheiten, d.h. nach xc=80 Sekunden, ist das Aquarium halbleer.Nach nc=52 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=260 Sekunden, ist das Aquarium leer.

Verbesserung: N = 1000 **sehr langsam !!** Änderung bei ◆ [Y=] u2(n) = u2(n-1) -√ (5*u2(n-1)) *0.02

◆ [WINDOW] nmax=1000

n	u1 (= t)	u2 (= y)
543	271.5	0.0018
544	272	-1 E -4

Die Lösung mit dem **Sequence Graphing** ist oft sehr langsam. Mit einem Programm bekommt man auch für kleine Intervalle die Näherungen schneller.

Programm für die Approximation der Differentialgleichung : y ' = f (x , y) :

- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: Function -> Program
  Variable: euler
- Das Programm eintippen

```
euler ( funk, xv, yv, x0, y0, xbis, dx, OutStep )
Prgm

   Local xx, yy, m, aus
   ClrIO
   Disp "      "&string(x0)&"         "&string(y0)

   y0 -> yy:      0 -> aus
   For  xx, x0, xbis-dx, dx
      funk | xv =xx  and  yv = yy  -> m
      yy + m * dx   -> yy
      aus + 1      -> aus
   If  aus*dx ≥ OutStep Then
      Disp "      "&string(xx+dx)&"         "&string(yy)
      0   ->  aus
   EndIf
   EndFor
   If   aus > 0 Then
      Disp "      "&string(xx)&"         "&string(yy)
   EndIf
EndPrgm
```

PARAMETER:
funk : Funktionsterm f (x , y)
xv, yv : Funktionsvariablen
(x0, y0): Startpunkt
xbis : Endstelle der Approximation
dx : Intervallbreite der Approximation
OutStep: Ausgabeschritt

Aufruf :
◆ [HOME]

euler (-√ (5 * y) / 25, x, y, 0, 150, 271.5, 0.5, 50)

```
0    150
   50.    100.183
   100.    60.3764
   150.    30.5848
   200.    10.8141
   250.    1.08063
   271.5    .001801
```

1. Herleitung der Lösungsfunktion:

Ansatz : Die Form des Graphen von y und die Eigenschaften von y legen den Ansatz einer Potenzfunktion für y nahe: $y(t) = (a + b\,t)^c$

Definition :	(a + b * tt)^c -> y (tt)	$\Rightarrow$	Done
Mittlere Änderungsrate:	(y (t + dt) - y (t)) / dt -> q (t, dt)	$\Rightarrow$	Done
Momentane Änderungsrate:	**Limit (** q (t, dt), dt, 0 **)**	$\Rightarrow$	$\dfrac{b\cdot c\cdot(b\cdot t+a)^c}{b\cdot t+a}$

Bestimmung der Parameter: Aus der Differentialgleichung $y'(t) = -\dfrac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)}$ folgt:

$$\frac{b\cdot c\cdot(b\cdot t+a)^c}{b\cdot t+a} = -\frac{\sqrt{5}}{25}(a+b\cdot t)^{\frac{c}{2}} \quad \forall t$$

Manuelle Herleitung[4]: $(b\cdot c)^2\cdot(b\cdot t+a)^{2(c-1)} = \dfrac{1}{125}(a+b\,t)^c \quad \forall t$

$2(c-1) = c \Rightarrow c = 2$

$(b\cdot 2)^2 = \dfrac{1}{125} \Rightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{50}$ (y monoton fallend $\Rightarrow$ b < 0)

$y(0) = a^c = a^2 = 150 \Rightarrow a = \pm 5\cdot\sqrt{6}$

Lösung: $y(t) = \left(5\cdot\sqrt{6} - \dfrac{\sqrt{5}}{50}\,t\right)^2$

2. Herleitung der Lösungsfunktion (Separation der Variablen):

$y'(t) = -\dfrac{\sqrt{5}}{25}\sqrt{y(t)} \Leftrightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{y(t)}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{25}\,dt$

solve (∫ (y^(-1/2) , y) = ∫ (- √ (5) / 25 , t ,c), y **)** $\Rightarrow$ $y = \dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-25\cdot c)^2}{2500}$ and $\sqrt{5}\cdot t-25\cdot c \le 0$

(√ (5) *t - 25*c)^2/2500 -> y (t , c) $\Rightarrow$ Done

solve (y (0, c) = 150 , c **)** $\Rightarrow$ $c = 10\cdot\sqrt{6}$ or $c = -10\cdot\sqrt{6}$

y (t , 10 * √6) $\Rightarrow$ $\dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-250\sqrt{6})^2}{2500}$

Lösungsfunktion : $y(t) = \dfrac{(\sqrt{5}\cdot t-250\sqrt{6})^2}{2500}$

Bestimmung der exakten Entleerungszeiten

1. Auf das halbe Volumen : **solve (** y (t , 10 ·√6) =75, t **)** $\Rightarrow$ $t = 50(\sqrt{2}-1)\sqrt{15}$ (≈ 80)
2. Völlige Entleerung: **solve (** y (t , 10 ·√6) =0, t **)** $\Rightarrow$ $t = 50\sqrt{30}$ (≈ 274)

Modellkritik:
- Wasserwirbel (vorallem am Schluss der Entleerung) werden nicht berücksichtigt.

Die SchülerInnen müssen eine minimale Fertigkeit in der Technik des **Sequence Graphing** mit dem TI-92 erreichen, damit sie bei der Bearbeitung der Modelle nicht an der Bedienung des TI-92 scheitern.

Aufgabe:
Untersuche die Funktion $y(t)$ mit $y(t+\Delta t) \approx y(t)\,(1 + (10 - y(t))\,\Delta t / 20)$ und $y(0) = 1$
Bestimme eine Näherung für $y(7)$. Wann ist $y(t) = 5$?

[4] CAS erleichtert die Algebra für die Bestimmung der Parameter nicht.

1.2.3 Salzen - Entleeren

MODELLIERUNG

Im Meerwasseraquarium sind am Anfang $m_0 = 900$ kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von q% = 6%. Das Aquarium hat die Abmessungen l = 180 cm, b = 100 cm und h = 150 cm.
Der Querschnitt des Ablaufs im Boden des Aquariums ist $Q = 36\ \text{cm}^2$.
Pro Sekunde werden z = 18 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von p% = 3% in das Aquarium eingeleitet.

Modellannahmen:

- Die Salzkonzentration im Aquarium ist homogen, dh. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleichviel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgelassen und danach fliesst das Salzwasser in das Aquarium.
- 1 kg Salzwasser = 1 ℓ Salzwasser. Es ist also: $V_0 = 900\ \ell = 900\,000\ \text{cm}^3$ und das Zuflussvolumen pro Sekunde $z = 18\ \ell = 18000\ \text{cm}^3$.
- $g = 1000\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$

Bezeichnungen:

S (t) : Salzmenge (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
V (t): Volumen des Salzwassers (cm^3), das zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
y (t): Wasserhöhe (cm) im Aquarium zum Zeitpunkt t ($y(t) \cdot 180 \cdot 100 = V(t)$).

Gesetz von Torricelli

Unter der Annahme, dass $g = 1000\ \text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$ ist, gilt für die Abflussgeschwindigkeit: $v(t) = 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}$ cm / s

Auftrag: Untersuche die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium, wenn gleichzeitig der Ablauf offen ist.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S und V:

- $S(0) = V_0 \cdot q / 100 = 54$ kg   Salzmenge zum Zeitpunkt 0
- Der Zufluss bringt konstant $z \cdot p / 100 = 0.54$ kg Salz pro Sekunde in das Aquarium. Am Anfang gehen durch den Abfluss $\frac{Q \cdot v(0)}{10^3 \cdot V_0} \cdot S(0) = 0.6830$ kg Salz pro Sekunde verloren. S ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Der Abfluss in einer Sekunde ist am Anfang $Q \cdot v(0) / 10^3 = 11.38\ \ell$. Daher nimmt das Salzwasser-volumen V(t) zu, während der Salzgehalt fällt. Der Salzverlust nimmt also mit der Zeit ab. Dadurch wird der Salzzuwachs nach einer gewissen Zeit den Verlust übertreffen, und S wird dann *monoton wachsen.*
- $V(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} V^*$ und $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} S^*$ (falls $z \leq$ Max. Abfluss $= 36 \cdot 20 \cdot \sqrt{5}\cdot\sqrt{150}\,/10^{-3} \approx 19{,}7$)

Allgemeine Approximation:

Wir betrachten die Änderungsrate von V und S in einem sehr kleinen Zeitintervall $[\,t, t+\Delta t\,]$:

Wasserabfluss im Intervall [t, t+ Δt]: $\approx Q \cdot v(t)\,\Delta t = 36 \cdot 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{y(t)}\,\Delta t = 36 \cdot 20\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{V(t)}{18000}}\,\Delta t$

$\approx 12\sqrt{V(t)}\,\Delta t$

Wasserzufluss im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot 10^3\ \Delta t = 18 \cdot 10^3\,\Delta t$

Wasservolumen zur Zeit t+ Δt:

$$V(t+\Delta t) \approx V(t) - Q \cdot v(t)\,\Delta t + z \cdot 10^3\ \Delta t$$

$$V(t+\Delta t) \approx V(t) - 12\sqrt{V(t)}\,\Delta t + 18 \cdot 10^3\ \Delta t \qquad (6)$$

Salzverlust im Intervall [t, t+ Δt]: $\approx Q \cdot v(t)\cdot\Delta t \cdot \frac{S(t)}{V(t)} = \frac{12\cdot\sqrt{V(t)}}{V(t)}\,S(t)\,\Delta t = \frac{12}{\sqrt{V(t)}}\,S(t)\,\Delta t$

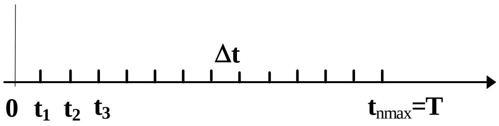
Salzzuwachs im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot \frac{p}{100}\,\Delta t = 0.54\ \Delta t$

Salzmenge zum Zeitpunkt t+Δt:

$$S(t+\Delta t) \approx S(t) - \frac{12}{\sqrt{V(t)}}\,S(t)\,\Delta t + 0.54\ \Delta t \qquad (7)$$

Approximation mit dem Computer:

Wir wollen die Entwicklung des Salzwasservolumens und der Salzmenge im Aquarium in den ersten 2000 Sekunden betrachten. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis T = 2000 s in nmax = 200 gleichlange Intervalle. Von $V(t_0) = V(0) = 900\,000$ und $S(t_0) = S(0) = 54$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von V und S jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



Aus den Gleichungen (6) und (7) für $t = t_{n-1}$ und $t + \Delta t = t_n$ folgt:

$$V(t_n) \approx V(t_{n-1}) - 12\sqrt{V(t_{n-1})}\,\Delta t + 18 \cdot 10^3\ \Delta t$$

$$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - \frac{12}{\sqrt{V(t_{n-1})}}\,S(t_{n-1})\,\Delta t + 0.54\ \Delta t$$

nmax = 200 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / \text{nmax} = 10$ und

$t_n = \Delta t \cdot n = 10 \cdot n$ mit $n = 0,1,\ldots,200$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

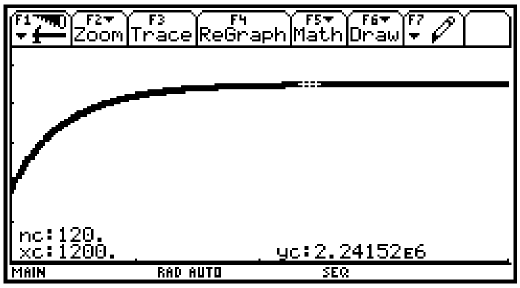
[Y=]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
✔ u2(n)= u2(n-1) - 120*√ (u2(n-1))+180000	(Volumen $V(t_n)$)
ui2 = 900000	(Volumen $V(t_0)$)
u3(n) = u3(n-1)*(1-120 / √ (u2(n-1)))+ 5.4	(Salz: $S(t_n)$)
ui3 = 54	(Salz: $S(t_0)$)

Bemerkung: Bei einer Folge kann man mit [F4] das Zeichen ✔ setzen oder löschen. Für die so ausgewählte Folge wird der Graph gezeichnet.

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u2 (Volumen: $V(t_n)$)

Wasservolumen:



[WINDOW]

nmin = 0	nmax=200	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=2000	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=2700000	(Bereich der Funktion V)
xscl =500	yscl =500000	(Unterteilung der Achsen)

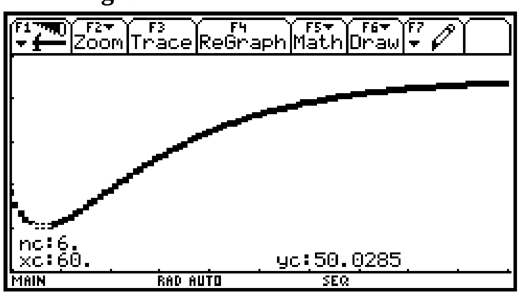
[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

[Y=]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n)= u2(n-1) - 120*√ (u2(n-1))+180000	(Volumen $V(t_n)$)
ui2 = 900000	(Volumen $V(t_0)$)
✔ u3(n) = u3(n-1)*(1-120 / √ (u2(n-1)))+ 5.4	(Salz: $S(t_n)$)
ui3 = 54	(Salz: $S(t_0)$)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1 (Zeit: t_n)
Y Axis: u3 (Salz: $S(t_n)$)

Salzmenge:



[WINDOW]

nmin = 0	nmax=100	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=1000	(Bereich der Zeit t)
ymin=45	ymax=70	(Bereich der Funktion S)
xscl = 100	yscl =5	(Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

Feststellungen:

- Nach nc=120 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=1200 s = 20 min, hat man schon fast das max. Volumen erreicht.
- Nach nc=6 Zeiteinheiten, d. h. nach xc=60 s = 1 min, erreicht die Salzmenge im Aquarium ein Minimum.

Differentialgleichungen:

Aus den Gleichungen (6) und (7) bekommt man:

Die **mittlere Änderungsrate** des Volumens im Intervall [t , t+Δt]: $\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} \approx -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$

Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Intervall [t , t+Δt]: $\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \approx -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$

Die **momentanen Änderungsraten** zur Zeit t sind dann:

$$V'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3 \quad \text{mit } V(0) = 900000 \text{ cm}^3$$

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = -\frac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54 \quad \text{mit } S(0) = 54 \text{ kg}$$

Die Lösungen des Entsalzungsmodells werden wir im 4. Kapitel noch ausführlicher untersuchen.

Aufgaben:

a) Gegen welchen Grenzwert strebt das Volumen V (t) bzw. die Salzmenge S (t)?
Bedingung: $z = Q \cdot v$
solve(18000 = 36 * 20 * √ (5*y), y **)** ⇒ y = 125
Daraus folgt: $V^* = 2250\ \ell$ und $S^* = 2250 \cdot 3/100 = 67.5$ kg

b) Wie gross muss der Zufluss z - gemessen in ℓ / s - sein, damit das Volumen V (t) gegen das Volumen des Aquariums strebt?
Damit $V^* = 2700\ \ell$ (y = 150) ist muss für den Zufluss gelten: $z \cdot 10^3 = 36 \cdot 20\sqrt{5 \cdot 150}$
solve(z * 10^3 =36 * 20 * √ (5*150), z **)** ⇒ $z = \frac{18 \cdot \sqrt{30}}{5}$ ⇒ $z = 19.718..$ ℓ / s

c) Für welche Zuflussrate z nimmt das Volumen ab ?
solve(z * 10^3 ≤ 36 * 20 * √ (5*50), z **)** ⇒ $z \le \frac{18 \cdot \sqrt{10}}{5}$ ⇒ $z \le 11.384..$ ℓ / s

Modellkritik:
Die Vereinfachung, dass 1ℓ Salzwasser 1 kg Salzwasser entspricht, ist nicht wesentlich.

Wird anstelle des Abflusses eine konstante Menge a ℓ / s Aquariumwasser abgepumpt, so erhält man ein wesentlich einfacheres Modell. Dieses Modell wollen wir zum Abschluss noch untersuchen.

1.2.4 Entsalzen durch Abpumpen

MODELLIERUNG
Im Aquarium sind am Anfang m_0 = 900 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von q% = 8%. Solange das Aquarium, das 2700 kg fasst, nicht voll ist, werden pro Sekunde a = 6 kg Aquariumwasser abgepumpt und gleichzeitig pro Sekunde z = 8 kg Salzwasser mit einem Salzgehalt von p% = 3 % in das Aquarium eingeleitet.

Modellannahmen:
- Die Salzkonzentration im Aquarium ist homogen, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleichviel Salz enthalten.
- In einem kleinen Zeitintervall wird zuerst das Wasser aus dem Aquarium abgepumpt, und danach fliesst das Salzwasser in das Aquarium.

Bezeichnungen:
S (t) : Salzmenge (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden ist.
m (t): Salzlösung (kg), die zum Zeitpunkt t im Aquarium vorhanden vorhanden ist.

Auftrag: Untersuche die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium.

Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion S abgeleitet werden.

Eigenschaften von S :
- $S(0) = m_0 \cdot q / 100 = 72$ Salzmenge zum Zeitpunkt 0
- Der Zufluss bringt konstant $z \cdot p / 100 = 0.24$ kg Salz pro Sekunde in das Aquarium. Am Anfang gehen durch den Abfluss $a / m_0 \cdot S(0) = 0.48$ kg Salz pro Sekunde verloren. S ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Die Salzwassermenge m(t) im Aquarium steigt, während der Salzgehalt stetig fällt. Der Salzverlust nimmt also mit der Zeit ab. Dadurch wird der Salzzuwachs nach einer gewissen Zeit den Verlust übertreffen und S wird dann *monoton wachsen.*

Manuelle Approximationen:
Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle.

Zeitintervallänge : 2 Sekunden
1. Zeitintervall [0, 2]

   Salzverlust : $a \cdot \frac{S(0)}{m_o} \cdot 2 = 0.96$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 0.48$

   Salzmenge nach 2 Sekunden: $S(2) \approx 72 - 0.96 + 0.48 = 71.52$ kg

2. Zeitintervall [2, 4]
   Das Salzwassermenge im Aquarium hat sich verändert .
   Sie ist nun nach 2 Sekunden: $m(2) = m_0 + 2 \cdot z - 2 \cdot a = 900 + 4 = 904$ kg

   Salzverlust: $a \cdot \frac{S(2)}{m(2)} \cdot 2 = 6 \cdot \frac{71.52}{904} \cdot 2 = 0.9494$ Salzzuwachs: $z \cdot \frac{p}{100} \cdot 2 = 0.48$

   Salzmenge nach 4 Sekunden: $S(4) \approx 71.52 - 0.9494 + 0.48 = 71.05$ kg

usw.

Allgemeine Approximation:
Wir betrachten die Änderungsrate von S in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] :

Wassermenge im Aquarium zur Zeit t: $m(t) = m_0 + (z - a)\,t = 900 + 2t$

Salzverlust im Intervall [t, t+ Δt]: $a \cdot \frac{S(t)}{m(t)} \Delta t = a \cdot \frac{a}{m_0 + (z-a)t} S(t)\,\Delta t = \frac{6}{900+2t} S(t)\,\Delta t$

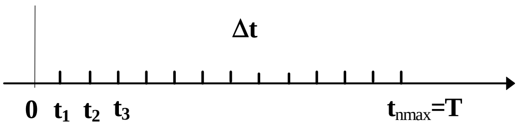
Salzzuwachs im Intervall [t, t+ Δt]: $z \cdot \frac{p}{100} \Delta t = 0.24\ \Delta t$

Salzmenge zum Zeitpunkt t+Δt:	$S(t+\Delta t) \approx S(t) - \frac{6}{900+2t} S(t)\,\Delta t + 0.24\ \Delta t$

(8)

Approximation mit dem Computer

Wir wollen die Entwicklung der Salzmenge im Aquarium in den ersten 900 Sekunden (Füllzeit) betrachten. Dazu unterteilen wir das Zeitintervall von 0 bis T = 900 s in nmax = 1800 gleichlange kleine Intervalle.
Von $S(t_0) = S(0) = 72$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von S jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



Aus der Gleichung (8) für $t = t_{n-1}$ und $t + \Delta t = t_n$ folgt:

$$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - \frac{6}{900+2t} S(t_{n-1})\,\Delta t + 0.24\,\Delta t$$

nmax = 1800 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / nmax = 0.5$ und

$t_n = \Delta t \cdot n = .5 \cdot n$ mit $n = 0,1, ..1800$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

[Y=]

u1 (n) = 0.5*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-3 /(900+2*u1(n-1)))+0.12	(Salz: $S(t_n)$)
ui2 = 72	(Salz: $S(t_0)$)

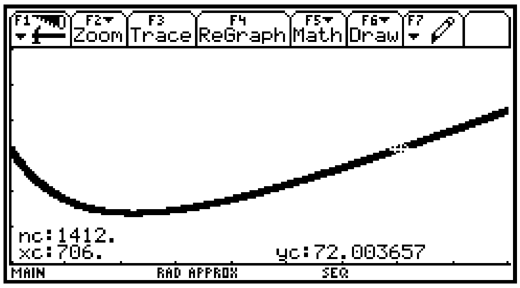
[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM

X Axis:	u1	(Zeit: t_n)
Y Axis:	u2	(Salz: $S(t_n)$)

[WINDOW]

nmin = 0	nmax=1800	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=900	(Bereich der Zeit t)
ymin=40	ymax=100	(Bereich der Funktion S)
xscl = 100	yscl =10	(Unterteilung der Achsen)

[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷



Feststellungen:
- Nach ca. 223 s wird die kleinste Salzmenge 53.80 kg erreicht.
- Nach ca. 706 s = 11 min 46 s ist wieder gleich viel Salz im Aquarium wie am Anfang.

Differentialgleichung

Aus der Gleichung (8) bekommt man:

Die **mittlere Änderungsrate** der Salzmenge im Intervall [t , t+Δt]: $\dfrac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \approx -\dfrac{6}{900+2t} S(t) + 0.24$

Die **momentane Änderungsrate** zur Zeit t ist: $S'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = -\dfrac{6}{900+2t} S(t) + 0.24$

Bemerkung

Die allgemeinen Entsalzungsmodelle sollte man erst in Angriff nehmen, nachdem die SchülerInnen mit der selbstständigen Bearbeitung von einfachen Projekten Erfahrungen gesammelt und einige Fertigkeiten im Umgang mit dem Sequence-Graphing des TI-92 erreicht haben.

Ausblick

Den Grenzübergang von der mittleren Änderungsrate zu der momentanen (lokalen) Änderungsrate, den wir eben nur andeuten konnten, muss nun bei konkreten Funktionen und Funktionsklassen genauer und systematisch studiert werden.

1.3 Projekte mit Lösungsskizzen

1. EINFACHE ENTSALZUNG

Eine Salzlösung in einem vollen Behälter soll durch die stetige Zufuhr von Süsswasser und den Abfluss von Salzlösung verdünnt werden. Wie verändert sich die Salzmenge im Behälter ? Nach welcher Zeit ist der Salzgehalt auf die Hälfte gesunken?

Modellierung

Für die Untersuchung des Problems betrachten wir z. B. die folgende Versuchsanordnung:
In einem Behälter mit V=100 dm^3 Wasser sind m=200 g Salz. Durch ein Rohr fliesst pro Sekunde W=1 dm^3 reines Wasser in den Behälter, in der gleichen Zeitspanne laufen W dm^3 Salzwasser aus. Die Versuchanordnung garantiert, dass die Salzkonzentration im Behälter stets homogen ist, d. h. in jeder Volumeneinheit ist jeweils gleich viel Salz enthalten.

Mit S (t) bezeichnen wir die Salzmenge, die im Behälter zum Zeitpunkt t (Sekunde) vorhanden ist. S ist also die Funktion, die in jedem Zeitpunkt t angibt, wieviel Salz noch im Wasser vorhanden ist.

Eigenschaften von S :

- $S(0) = 200$
- $S(t) > 0$
- S ist eine *streng monoton fallende* Funktion
- $S(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$
- Definitionsbereich |D : $t \geq 0$
- Wertebereich |W: $0 < S(t) \leq 200$
- Vermutung: S wird immer langsamer abnehmen

Allgemeine Approximation:

Wir betrachten die Änderung der Salzmenge in einem beliebigen sehr kleinen Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$

Salzmenge zum Zeitpunkt 0: $S(0) = m = 200$

Salzmenge zum Zeitpunkt t: $S(t)$

Salzverlust im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$: $\approx S(t)\frac{W\cdot\Delta t}{V} = S(t)\frac{1\cdot\Delta t}{100}$

Salzmenge zum Zeitpunkt $t+\Delta t$: $S(t+\Delta t) \approx S(t) - S(t)\frac{1}{100}\Delta t$

Approximation mit dem Computer

Wir unterteilen das Intervall [0 , 100s] in nmax = 200 gleich lange Teilintervalle der Länge Δt.
nmax = 200 $\Rightarrow$ $\Delta t = T / nmax = 0.5$ und $t_n = t \cdot n / nmax = .5 \cdot n$ mit n = 0,1,...,200

$S(t_n) \approx S(t_{n-1}) - S(t_{n-1})\Delta t / 100 = S(t_{n-1})(1 - \Delta t / 100)$

Einstellung : [MODE] Graph........ FUNCTION-> 4: SEQUENCE

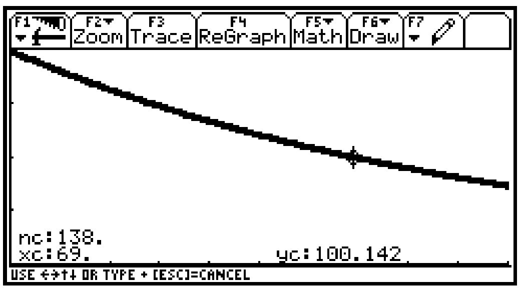
[Y=]

u1 (n) = 0.5*n	(Zeit: t_n)
ui1 = 0	(Zeit: t_0)
u2(n) = u2(n-1)*(1-0.5/100)	(Salz: $S(t_n)$)
ui2 = 200	(Salz: $S(t_0)$)

[F 7]	Axes:	Time ->	3: CUSTOM
	X Axis:	u1	(Zeit: t_n)
	Y Axis:	u2	(Salz: $S(t_n)$)

[WINDOW]

nmin = 0	nmax=200	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=100	(Bereich der Zeit t)
ymin=0	ymax=200	(Bereich der Funktion S)
xscl = 10	yscl =50	(Unterteilung der Achsen)



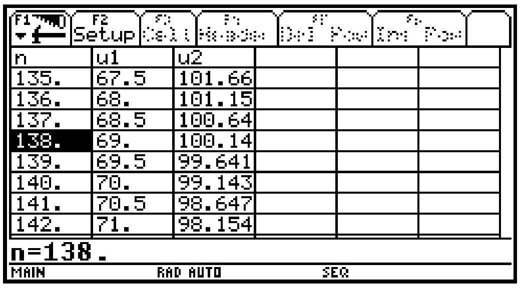
[GRAPH] [F 3] Trace: ▷▷▷

Resultat: Nach nc=138 Zeiteinheiten, d. h. nach xc= 69 Sekunden, sind noch ca. 100 g Salz in der Lösung.

Alternative:

[TblSet] tblStart: 135 (Startnummer) Δtbl : 1 (Schrittweite)

[TABLE]



n	u1	u2			
135.	67.5	101.66			
136.	68.	101.15			
137.	68.5	100.64			
138.	69.	100.14			
139.	69.5	99.641			
140.	70.	99.143			
141.	70.5	98.647			
142.	71.	98.154			

n=138.

Exakte Lösung

CAS - HERLEITUNG:

$S(t_{i-1}+\Delta t) = S(t_i) \approx S(t_{i-1}) - S(t_{i-1})\,\frac{1}{100}\,\Delta t$, $S(0) = s0$ und $\Delta t = \frac{t}{n}$

Zur Vereinfachung ersetzen wir : z = t / 100

Define s (i) = **when (** i =0, s0, s (i-1)*(1 - z / n) **)**

seq (s (i), i, 0, 30, 5 **)** $\Rightarrow$ $\left\{ s0 \quad \frac{-s0\cdot(z-n)^5}{n^5} \quad \frac{s0\cdot(z-n)^{10}}{n^{10}} \;.......... \; \frac{-s0\cdot(z-n)^{25}}{n^{25}} \quad \frac{s0\cdot(z-n)^{30}}{n^{30}} \right\}$

Bemerkungen:

- Ohne die Vereinfachung rechnet sich das CAS ins Abseits.
- Der max. Wert für i, der keinen Memory-Error liefert, ist 34 !!

Für den Grenzwert gilt:

$$S(t) = \lim_{n\to\infty} S(0)\left(1 - \frac{(t/100)}{n}\right)^n = S(0)\,e^{-\frac{t}{100}} = 200\,e^{-\frac{t}{100}}$$

Wir verweisen für die Berechnung dieses Grenzwertes mit Hilfe des CAS auf die Fussnote 3.

Halbwertszeit:

solve (200*e^(-t / 100)=100, t **)** $\Rightarrow$ t = 100 ln (2) ($\approx$ 69. 3)

Es vergehen 69.3 Sekunden, bis die Salzmenge auf die Hälfte reduziert ist.

2. UNBEGRENZTES WACHSTUM

Im Labor wird unter optimalen Bedingungen die Entwicklung einer Bakterienpopulation beobachtet. Wie wächst die Poulation ?

Modellierung

Anfangsbestand $N(0) = N_0 = 10^3$

Annahme: Der rel. Zuwachs (prozentualer Zuwachs) in einem sehr kleinen Zeitintervall ist proportional zur Länge des Zeitintervalls Δt.
Der Proportionalitätsfaktor ist k = 0.2 pro Stunde.

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{N(t)} \approx k\Delta t$$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} \approx k\,N(t)$

Momentane Änderungsrate: $N'(t) = k\,N(t)$

Exakte Lösung: $N(t) = N_0\, e^{kt} = 10^3\, e^{0.2\,t}$

3. LERNVERMÖGEN

Jeder hat schon erfahren oder erlitten, dass er zunächst sehr rasch und dann immer langsamer lernt und nach einiger Zeit kaum noch zusätzlichen Stoff aufnehmen kann. Man nähert sich mit der Zeit der individuellen maximalen Lernstoffmenge L_m.

Modellierung (siehe: Nachsalzungsmodell)

Annahmen:
- Die maximale Lernstoffmenge ist 200 einzelne Lerneinheiten .
- Die Lernstoffmenge, die man bis zum Zeitpunkt t (Minuten) gelernt hat ist L (t).
- Der mittlere Zuwachs an gelernten Einheiten in einem kleinen Zeitintervall ist proportional zur Länge des Zeitintervalls und zur noch lernbaren Lernstoffmenge ($L_m - L(t)$).
- Mit Experimenten wurde der Proportionalitätsfaktor auf 0.02 geschätzt dh. in einer Minute lernt man im Mittel 2% der noch lernbaren Stoffmenge

Nach welcher Zeit hat man 90% der maximalen Lernstoffmenge gelernt ?

Mittlere Änderungsrate: $\frac{L(t+\Delta t)-L(t)}{\Delta t} \approx 0.02 \cdot (L_m - L(t))$

Momentane Änderungsrate: $L'(t) = 0.02 \cdot (L_m - L(t))$

Exakte Lösung: $L(t) = 200 \cdot (1 - e^{-\frac{2\cdot t}{100}})$

Die Zeit für das Erreichen von 90% der maximalen Lernstoffmenge ist :

zeros (200*(1 - *e*^(-2*t / 100)-180, t **)** $\Rightarrow$ { 50 ln (10) } $t \approx 115$

4. EINE KÜHLE COLA

Eine warme Cola wird in den Kühlschrank gestellt. Nach welcher Zeit kann man sie trinken ?
(Nach [7])

Modellierung (siehe: Nachsalzungsmodell)

Die Temperaturabnahme in einem kleinen Zeitintervall ist proportional zur Temperaturdifferenz und zur Länge des Zeitintervalls Δt. Die Temperatur im Kühlschrank ist konstant.

Temperatur im Kühlschrank. $T_E = 4\,°C$
Temperatur der Cola: $T_0 = 20°\,C$
Trinktemperatur: $T_1 = 6°\,C$

Temperatur der Cola zur Zeit t: $\vartheta(t)$; $\vartheta(0) = T_0 = 20°\,C$

Temperaturabnahme im Intervall [t, t+Δt]: $\vartheta(t+\Delta t) - \vartheta(t) \approx -k\,[\vartheta(t) - T_E]\,\Delta t$
$k = 3\ h^{-1}$

Mittlere Temperaturänderungsrate: $\frac{\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)}{\Delta t} \approx -k\,[\vartheta(t) - T_E]$

Momentane Temperaturänderungsrate: $\vartheta'(t) = -k\,[\vartheta(t) - T_E]$

Exakte Lösung: $\vartheta(t) = T_E + (T_0 - T_E)\,e^{-kt}$

5. NEUE BANKNOTEN

Die neuen 20-er Noten werden gegen die alten Noten ausgetauscht. Aus Erfahrung weiss man, dass nach 2 Monaten jeweils 80 % der sich noch im Umlauf befindlichen Noten ausgetauscht werden. Wann sind 99% der Noten ausgetauscht ?

Modellierung analog zum Lernvermögen

6. TRICHTER

Ein Trichter ist mit Wasser gefüllt. Nach welcher Zeit ist er leer ?

Modellierung (siehe: Entleeungsmodell)

Vereinfachung: Der Trichter ist ein Kegel mit dem Grundkreisradius R = 20 cm und der Höhe h=50 cm. Der Einfüllstutzen hat einen inneren Radius r = 1 cm. Im Stutzen ist kein Wasser.

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$; $y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit [cm s^{-1}]: $v(t) = 20\sqrt{5 \cdot y(t)}$ cm / s Gesetz von Torricelli

Volumenabnahme im Trichter: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)\,]\,\pi \left(\frac{R}{h} y(t)\right)^2$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx \pi r^2 v(t)\,\Delta t = \pi r^2 \sqrt{2000\, y(t)}\,\Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\left(\frac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; y^{-3/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\left(\frac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; y^{-3/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{5/2} - \frac{5}{2}\left(\frac{rh}{R}\right)^2 \sqrt{2000}\; t\right]^{2/5}$

7. STAUSEE I Liegende Dreieckspyramide

Das Wasser eines Stausees muss abgelassen werden. Der Stausee hat näherungsweise die Form einerDreiecks-pyramide. Die Talsohle ist eine Kante und die Talsperre ist die Grundfläche der Pyramide. Nach welcher Zeit ist der Stausee leer ?

Modellierung (siehe: Entleeungsmodell)

Maximaler Seespiegel: Länge a = 1500 m Stirnbreite b =300 m

Maximale Tiefe: Höhe h= 150 m

Abflussquerschnitt: $q = 1\ m^2$

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$; $y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit : $v(t) = 2\sqrt{5 \cdot y(t)}$ m / s Gesetz von Torricelli

Wasserspiegelfläche zur Zeit t: $A(t) = \frac{b}{2h} y(t) \frac{a}{h} y(t) = \frac{ab}{2h^2} y^2(t)$

Volumenabnahme im Stausee: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)\,]\; A(t)$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx q\, v(t)\,\Delta t = 2q\sqrt{5 \cdot y(t)}\,\Delta t$

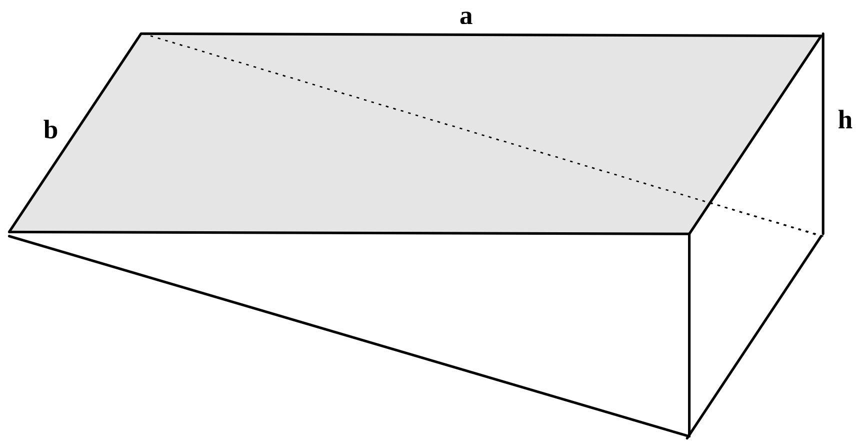
Mittlere Änderungsrate: $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -\frac{4 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; y^{-3/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\frac{4 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; y^{-3/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{5/2} - \frac{10 \cdot q \cdot h^2}{a \cdot b}\sqrt{5}\; t\right]^{2/5}$

8. STAUSEE II Liegendes Dreieckseckprisma

Das Wasser eines Stausees muss abgelassen werden. Der Stausee hat näherungsweise die Form eines liegenden Dreieckseckprismas. Der Seespiegel ist ein Rechteck, die Uferwände sind vertikal und der Seegrund steigt gleichmässig bis zum Seespiegel an. Nach welcher Zeit ist der Stausee leer ?



Modellierung (siehe: Entleerungsmodell)

Maximaler Seespiegel:	Länge a = 1500 m ;	Breite b =300 m
Maximale Tiefe:	Höhe h= 150 m	
Abflussquerschnitt:	$q = 1\ m^2$	

Höhe des Wasserspiegels zur Zeit t: $y(t)$; $y(0) = h$

Abflussgeschwindigkeit : $v(t) = 2\sqrt{5 \cdot y(t)}$ m / s Gesetz von Torricelli

Wasserspiegelfläche zur Zeit t: $A(t) = b\ \frac{a}{h}\ y(t)$

Volumenabnahme im Stausee: $\Delta V \approx [\,y(t+\Delta t) - y(t)\,]\ A(t)$

Abgeflossenes Volumen: $\Delta V \approx q\ v(t)\ \Delta t = 2\,q\sqrt{5\,y(t)}\ \Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t} \approx -\ \frac{2 \cdot q \cdot h}{a \cdot b}\sqrt{5}\ y^{-1/2}(t)$

Momentane Änderungsrate: $y'(t) = -\ \frac{2 \cdot q \cdot h}{a \cdot b}\sqrt{5}\ y^{-1/2}(t)$

Exakte Lösung: $y(t) = \left[h^{3/2} - \frac{3 \cdot q \cdot h}{a \cdot b}\sqrt{5}\ t\right]^{2/3}$

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann Heinz, Einführung in die Analysis 3 Sabe, 1975
[2] Braun M., Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1979
[3] Burg Klemens / Haf Herbert / Wille Friedrich, Höhere Mathematik für Ingenieure I, B.G Teubner, Stuttgart, 1985
[4] DMK, Analysis, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1989
[5] DMK, Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1984
[6] Gerthsen Christian, Physik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966
[7] Heuser Harro, Gewöhnliche Differentialgleichungen , B.G. Teubner Stuttgar, 1989
[8] Kirchgraber Urs, Differentialgleichungen in die Schule, Skriptum Departement Mathematik ETH Zürich, 1994
[9] Preckur Helmuth, Analysis 3, Mentor Verlag, München, 1988
[10] Storrer Hans Heiner, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986
[11] Strang Gilbert, Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1991
[12] Vogt Herbert, Grundkurs Mathematik für Biologen, B.G. Teubner, Stuttgart, 1983