ETH EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH

Analysis

mit dem Computer-Algebra-System des TI-92

Teil 4: Differentialgleichungen

Beat Eicke und Edmund Holzherr

11. November 1997

Eidgenössische Technische Hochschule
CH – 8092 Zürich

INHALT

	Seite
Hinweise	3
4. Differentialgleichungen	
4.1 Drei Beispiele	4
4.1.1 Schneeschaufeln	4
4.1.2 Forellenteich	5
4.1.3 Salzen - Entleeren	10
4.2 Projekte mit Lösungsskizzen	12
Literaturverzeichnis	21

Hinweise

TI-92 - Notationen

Wir haben folgende Notationen bei Berechnungen mit dem TI-92 verwendet:

$\rightarrow$ oder auch –>   bedeutet, dass die Taste STO▸ zu drücken ist

$\Rightarrow$ Nach einem Doppelpfeil folgt stets ein Resultat des TI-92.

Aufgaben

Wir haben keine Sammlung mit neuen oder gar revolutionären Aufgaben herausgeben wollen. Trotzdem haben wir ab und zu einige Vorschläge eingetreut, um zu zeigen, welche Aufgabentypen (nach wie vor) verwendet werden könnten, weil sie durch den Einsatz des CAS nicht völlig trivialisiert werden, sondern durchaus noch einige mathematische Kenntnisse voraussetzen.

4. Differentialgleichungen

4.1 Drei Beispiele

4.1.1 Schneeschaufeln

Am Morgen stellst man fest, dass es geschneit hat und es noch immer gleichmässig weiterschneit. Man beginnt das Trottoir freizuschaufeln. Während der 2. Stunde schafft man nur noch halb so viel wie in der 1. Stunde, obwohl man mit gleicher Kraft weitergeschaufelt hat. Wann begann es zu schneien ?
(Nach B.H. West, Setting up First-Order Differential Equations from World Problems, in M. Braun et al (Eds), Differential Equation Models, Vol 1, 1983 und [8])

Modellierung
Es geht während der beobachteten Zeit kein Schnee verloren.

b:	Trottoirbreite in m	s:	Schneefall in kg h^{-1} m^{-2}
p:	Schaufelleistung in kg h^{-1}	t:	Schaufelzeit in h

T: Zeit bevor man zu schaufeln angefangen hat und während der es schon schneite in h
Die Länge des freigeschaufeltes Trottoirstücks sei x (t).
Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion x abgeleitet werden.

Eigenschaften von x :

- $x(0) = 0$; $x(1) = 20$; $x(2) = 30$
- x wächst immer langsamer
- x ist eine *streng monoton wachsende* Funktion
- $|D = |W = |R^+$

Die in einem kleinen Zeitintervall [t, t+Δt] freigeschaufelte Fläche ist : $A = [\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b$

Während (t + T) Stunden fiel auf diese Fläche s Kilogramm Schnee pro Stunde und pro Quadratmeter.
Die Schneemenge, die während dieser Zeit auf die freigeschaufelte Fläche fiel ist daher:

$$W \approx A\,(t+T)\,s = [\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b\,(t+T)\,s$$

Die Schaufelarbeit in dem kleinen Zeitintervall [t, t+Δt] ist: $W = p\,\Delta t$

Es gilt nun: $[\, x(t+\Delta t) - x(t)\,]\; b\,(t+T)\,s \approx p\,\Delta t$

Daraus ergibt sich die **mittlere Schaufelgeschwindigkeit**: $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \dfrac{p}{b\,s}\,\dfrac{1}{t+T} = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Die **momentane Schaufelgeschwindigkeit** ist somit: $x'(t) = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Dies ist eine besonders einfache Differentialgleichung, da die momentane Änderungsrate nur vom Zeitpunkt t und nicht auch noch vom Wert der Zustandsgrösse x(t) abhängt.

Die Lösung ist eine Stammfunktion von $f(t) = k\,\dfrac{1}{t+T}$

Das CAS liefert : $\int (k/(t+tt), t, c) \;\Rightarrow\; k \cdot \ln(|t+tt|) + c$

Die allgemeine Lösung ist : $F(t) = x(t) = k\,\ln(t+T) + c$

Mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ gilt : $c = -\,k\,\ln T$ Daraus folgt: $x(t) = k\,\ln\dfrac{t+T}{T}$

Die zusätzlichen Informationen $x(1) = 20$ und $x(2) = 30$ ergeben :

$20 = k\,\ln\dfrac{1+T}{T}$ und $30 = k\,\ln\dfrac{2+T}{T}$ Daraus folgt: $\dfrac{20}{30} = \ln\dfrac{1+T}{T} \Big/ \ln\dfrac{2+T}{T}$

solve (20 / 30 = **ln (** (1 + t) / t**)** / **ln (** (2 + t) / t**)**, t **)** $\Rightarrow$ $t = \dfrac{-(\sqrt{5}+1)}{2}$ or $t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Es schneite schon ca. 37 min bevor man zu schaufeln begann (die erste Lösung ist unmöglich, da t ≥0).

AUFGABEN

- Was ändert sich, wenn x (1) = 50 m angesetzt wird ?
- Warum kann man mehr als 40 m freischaufeln ?

4.1.2 Forellenteich

Ein Zufluss vermehrt die Forellen, und ein leicht gedrosselter Abfluss vermindert die Forellen in einem Teich. Wie verändert sich der Forellenbestand ?

(Nach P.Calter,Graphical and Numerical Solution of Differential Equations, UMAP Module 81-83,1980 und [8])

MODELLIERUNG (entspricht einem Spezialfall des Entsalzungsmodells)

In dem Teich ist eine Restwassermenge von V_0= 180 hl, welche y_o= 150 Forellen enthält. Ein Zufluss führt pro Minute z=20 ℓ Wasser zu. Dadurch gelangen auch Forellen in den Teich, und zwar im Durchschnitt m=3 Stück pro 750 ℓ. Um den Teich nachzufüllen, ist der Abfluss aus dem Teich gegenüber dem Zufluss gedrosselt, er beträgt a= 18 ℓ Wasser pro Minute. Durch den Abfluss geht eine dem Volumen des Teichs entsprechende Menge Forellen verloren.

y (t) ist die Anzahl Forellen im Teich zum Zeitpunkt t (Minuten). Damit man das Problem mit Hilfe der Differentialrechnung modellieren kann, muss y (t) als kontinuierliche Variable angesehen werden. y (t) ist gewissermassen die Menge Fisch im Teich; analoges gilt auch für die Menge Fisch, die pro Minute zu - bzw. abfliesst. Aus der Modellbeschreibung können unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Funktion y abgeleitet werden.

Eigenschaften von y :

- y (0) = 150 ist die Menge Fisch (Anzahl) im Teich zum Zeitpunkt 0.
- Der Zufluss bringt konstant $m \cdot z$ / 750 = 0.08 Fische pro Minute in den Teich. Am Anfang gehen durch den Abfluss $a \cdot y_0$ / V_0 = 0.15 Fische pro Minute verloren. y ist daher zumindest am Anfang eine *monoton fallende* Funktion.
- Das Wasservolumen im Teich steigt aber stetig, so dass der Fischverlust vielleicht mit der Zeit abnehmen und dadurch ein Zuwachs resultieren wird. y könnte daher nach einer gewissen Zeit wieder *monoton wachsen*.

Manuelle Approximationen:

Die Zeit unterteilen wir in kleine, gleichlange Intervalle. In einem solchen Intervall nehmen wir an, dass zuerst die Fische durch den Abfluss verloren gehen und danach die Fische durch den Zufluss in den Teich kommen.

Zeitintervall : 2 Minuten

1. Zeitintervall [0, 2]

   Verlust an Forellen : $2 \cdot a \cdot \frac{y(0)}{V_0}$ = 0.3   Zuwachs an Forellen: $2 \cdot \frac{m}{750} z$ = 0.16

   Bestand nach 2 Minuten: $y(2) = y(0) - 2 \cdot a \cdot \frac{y(0)}{V_0} + 2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z$ = 150 - 0.3 + 0.16 = 149.86

2. Zeitintervall [2, 4]

   Das Wasservolumen im Teich hat sich verändert. Nach 2 Minuten ist: $V(2) = V_0 + 2\,(z - a) = V_0 + 4$ =18004

   Verlust an Forellen : $2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V(2)} = 2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V_0 + 2(z-a)}$ = 0.2997   Zuwachs an Forellen: $2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z$ = 0.16

   Bestand nach 4 Minuten: $y(4) = y(2) - 2 \cdot a \cdot \frac{y(2)}{V_0 + 2(z-a)} + 2 \cdot \frac{m}{750} \cdot z$= 149.86-0. 2997+ 0.16= 149.72

Bevor wir den Computer für eine bessere Approximation einsetzten, wollen wir die Differentialgleichung herleiten und deren Bedeutung etwas genauer untersuchen.

Differentialgleichung

Wir betrachten die Änderungsrate von N in einem sehr kleinen Zeitintervall [t , t +Δt] :

Zuwachs an Forellen im Intervall [t, t+ Δt]: $\frac{m}{750} z \,\Delta t = \frac{2}{25} \Delta t$

Wassermenge V (t) [Liter] im Teich zur Zeit t: $V(t) = V_0 + (z - a)\,t$ = 18 000 + 2 t

Verlust an Forellen im Intervall [t, t+ Δt]: $a \cdot \frac{y(t)}{V_0 + (z-a)\,t} \cdot \Delta t = \frac{9}{9000+t} y(t)\,\Delta t$

Forellenmenge zum Zeitpunkt t+Δt: $y(t+\Delta t) \approx y(t) + \frac{2}{25}\Delta t - \frac{9}{9000+t} y(t)\,\Delta t$

Die mittlere Änderungsrate der Forellenmenge ist: $\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t} y(t)$

Die **momentane Änderungsrate** der Forellenmenge ist: $y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t} y(t)$ (1)

Richtungsfeld

Mathematische Deutung der Differentialgleichung:

$$y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\, y(t) = f(t, y)$$

Jedem Punkt der (t,y)-Ebene kann man die Gerade mit der Steigung

$m(t, y) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\, y(t)$ (die Steigung der Tangente durch den Punkt P (t, y))

zuordnen. Von dieser Geraden zeichnet man nur ein kleines Stück in der Nähe des zugehörigen Punktes. Dadurch bekommt man das sogenannte *Richtungsfeld* der Differentialgleichung.

Richtungsfeld von y ' = f (t , y)

Mit einem kleinen Programm auf dem TI-92 kann das Richtungsfeld einer Differentialgleichung leicht und schnell erzeugt werden.

Programm erzeugen:
- Taste [APPS]   7: Program Editor   3: New... Type: PROGRAM ->
  Variable: SlpField
- Das Programm eintippen

```
SlpField ( funk,tp,yp,tvon,tbis,yvon,ybis )
Prgm

Local dt, dy, dg, m, tx, yy
tvon -> xmin:  tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
For  tx, tvon,tbis,dt
     For  yy, yvon , ybis, dy
         funk | tp=tx and yp =yy  -> m
         Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
    EndFor
EndFor
EndPrgm
```

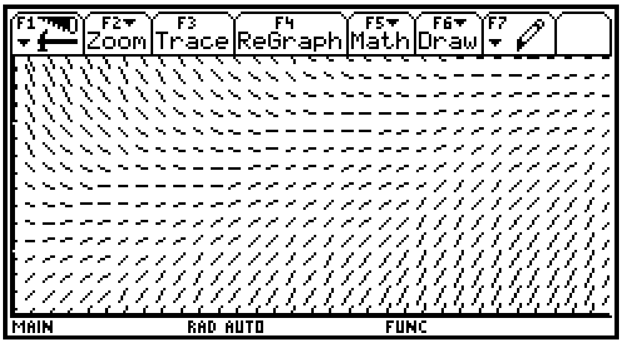
Aufruf:

[HOME]

SlpField(2 / 25 - 9 / (9000 + t)*y, t, y, 0, 9000, 50, 150)

PARAMETER:

funk :	Funktionsterm f (t, y)
tp, yp :	Funktionsvariablen
[tvon, tbis] :	t-Bereich
[yvon, ybis] :	y-Bereich



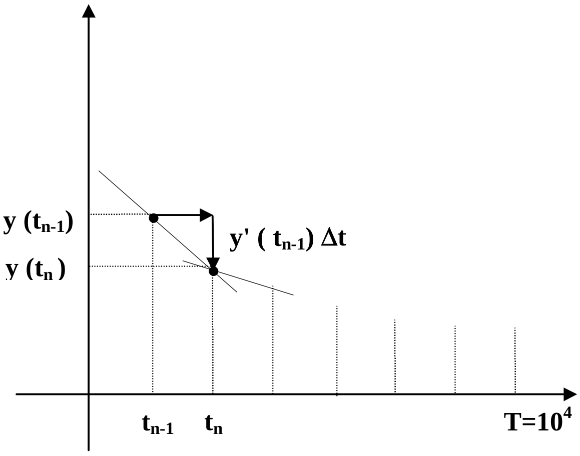
Die grundsätzliche Aufgabe ist nun offensichtlich: "Finde Kurven, die sich in das Richtungsfeld einschmiegen " oder genauer: *Finde Kurven, die in jedem ihrer Punkte tangential an das Richtungsfeld sind* .

Eine solche Kurve heisst Lösungskurve; die Funktion, deren Bild die Kurve ist, nennt man *Lösung der Differentialgleichung.*

Folgerungen:
1. Es gibt viele Lösungskurven, d. h. es gibt viele verschiedene Lösungen der Differentialgleichung.
2. Durch einen Punkt P(t_0, y_0) gibt es genau eine Lösungskurve. Das bedeutet: Kennt man zu einem Zeitpunkt den Zustand, so ist der ganze Verlauf des Prozesses, vor- und rückwärts, bestimmt.
3. Die Idee des Richtungsfeldes legt auch das Verfahren von Euler-Cauchy nahe, um von einem gegebenen Punkt aus einen neuen Punkt der Lösungskurve zu approximieren.

Approximation nach Euler-Cauchy

Für eine Differentialgleichung können wir mit einem allgemeinen Verfahren[11] Näherungslösungen bestimmen. Wir unterteilen das Zeitintervall von 0 bis z. B. T = 10000 min in nmax = 1000 Intervalle der Länge Δt. Von $y(t_0) = y(0) = 150$ ausgehend, approximieren wir schrittweise den Funktionswert von y jeweils an der nächstfolgenden Stelle.



$$t_n = n \frac{T}{nmax} = n\,\Delta t = 10 \cdot n$$

Lineare Approximation:

$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + y'(t_{n-1})\,\Delta t$ und $y(t_0) = y(0) = 150$

Mit der Differentialgleichung (1) $y'(t) = \frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t}\,y(t)$ erhalten wir die sog. Euler-Cauchy Approximation:

$$y(t_n) \approx y(t_{n-1}) + \left(\frac{2}{25} - \frac{9}{9000+t_{n-1}}\,y(t_{n-1})\right)\Delta t; \qquad y(t_0) = y(0) = 150 \quad n = 1, 2, \ldots, 1000$$

Diese Approximation ist die gleiche Approximation wie die, die wir für die manuelle Approximation und die Berechnungen im Einführungskapitel jeweils aus den Differenzengleichungen hergeleitet haben.

Verallgemeinerung

Lineare Approximation: Für $y' = f(x, y)$ ist $y(x_n) \approx y(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta t$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE

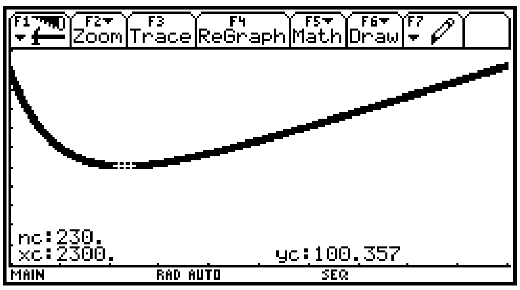
[Y=]

u1 (n) = 10*n	(Zeit: t_n)
u2(n)= u2(n-1)+(2/25-9/(9000+ 10*(n-1))*u2(n-1))*10	(Bestand: y (t_n))
ui2 = 150	(Bestand: y (t_0))

[F 7]	Axes:	Time ->	3: CUSTOM	
	X Axis:		u1	(Zeit: t_n)
	Y Axis:		u2	(Bestand: y (t_n))

[WINDOW]

nmin = 0	nmax=1000	(Bereich der Nummern)
xmin=0	xmax=10000	(Bereich der Zeit t)
ymin=50	ymax=160	(Bereich der Funktion y)
xscl=1000	yscl=10	(Teilung der Achsen)



[GRAPH]

Feststellung: Der Fischbestand sinkt zuerst auf ca. 100 Stk. nach 2300 min. (38 h) und erholt sich nach 9740 min. (6.76 Tagen) wieder auf 150 Stk (ca. doppelte Wassermenge).

[11] Es gibt wesentlich bessere, aber aufwendigere Verfahren als das Verfahren von Euler-Cauchy

Richtungsfeld von y ' = f (t , y) mit der Lösungskurve durch den Punkt (t0, y0)

Mit dem Verfahren von Euler-Cauchy kann eine Näherungskurve durch einen gegebenen Punkt in das Richtungsfeld gelegt werden.

Programm erzeugen:
- Taste [APPS]   7: Program Editor   3: New... Type: PROGRAM ->
  Variable: SlopCurv
- Das Programm eintippen

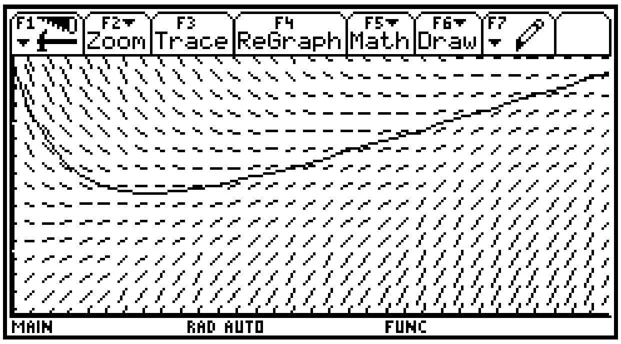
```
SlopCurv ( funk,tp,yp,tvon,tbis,yvon,ybis ,t0,y0)
Prgm

Local dt, dy, dg, m, tx, yy,tx1,tx2,yy1,yy2

tvon -> xmin:  tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
For  tx, tvon,tbis,dt
    For  yy, yvon , ybis, dy
        funk | tp=tx and yp =yy  -> m
        Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
    EndFor
EndFor

t0 -> tx1:  y0 -> yy1
For tx,t0,tbis,dt
    funk | tp=tx and yp=yy1  -> m
    tx+dt->tx2 :  yy1+ m*dt -> yy2
    Line tx1,yy1,tx2,yy2
    tx2 -> tx1 : yy2 -> yy1
EndFor
t0 -> tx1:  y0 -> yy1 : - dt -> dt
For tx,t0,tvon,dt
    funk | tp=tx and yp=yy1  -> m
    tx+dt->tx2 :  yy1+ m*dt -> yy2
    Line tx1,yy1,tx2,yy2
    tx2 -> tx1 : yy2 -> yy1
EndFor
EndPrgm
```

Aufruf:
[HOME]

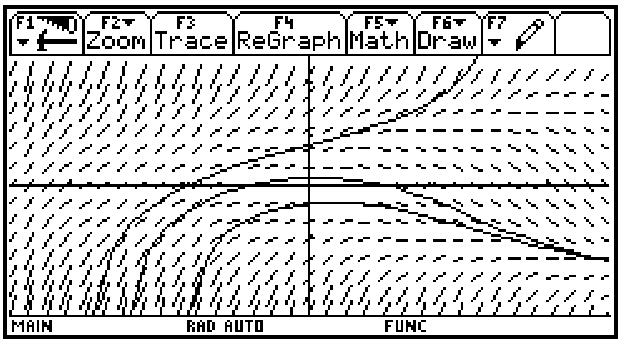
SlopCurv(2/25-9/(9000 + t)*y, t, y, 0,9000, 50, 150, 0,150)

PARAMETER:

funk	:	Funktionsterm f (t , y)
tp, yp	:	Funktionsvariablen
[tvon, tbis]	:	t-Bereich
[yvon, ybis]	:	y-Bereich
[t0, y0]	:	Kurvenpunkt



Aufgabe:
Untersuche die Lösungskurven im Richtungsfeld der Differentialgleichung : $y' = y^2 - t$



Hinweis: Verschiedene Lösungskurven kann man dadurch in das gleiche Richtungsfeld zeichnen, indem man das Programm mit verschiedenen Kurvenpunkten (t0, y0) aufruft.

Modellkritik:
- Forellen könnten vielleicht auch durch den Zufluss verloren gehen.
- Die biologische Vermehrung ist vernachlässigt.
- Wie wird der Anfangsbestand der Forellen bestimmt ?
- Die konstante Vermehrung durch den Zufluss ist problematisch.
- Man nimmt an, dass es im betrachteten Zeitraum zu keiner Überbevölkerung kommt.
- Gibt es kein Beschränkung für das Auffüllen des Teichs ?

Herleitung der exakten Lösung:

$y'(t) = \frac{m}{750} \cdot z - \frac{a}{t(z-a)+Vo}\, y(t)$; $y(0) = yo$ ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung.

Bestimmung der allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung (Separation der Variablen):

t*(z-a) + vo -> r (t) $\Rightarrow$ Done

solve($\int$ (1 / y , y) = - $\int$ (a/ r (t) , t)), y **)** | y > 0 $\Rightarrow$ $y = (|t(z-a)+vo|)^{\frac{-a}{z-a}}$

Lösung der homogenen Differentialgleichung : $y_h(t) = co\ r(t)^{\frac{-a}{z-a}}$

Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung :

Ansatz: $y_p(t) = c(t)\, y_h(t)$

r (t)^(-a/(z-a))-> yh (t) $\Rightarrow$ Done

c (t) *yh (t) -> yp (t) $\Rightarrow$ Done

d **(** yp (t) , t **)** -(z*m/750 - a / r (t) * yp (t))=0 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}(c(t))\ (t(z-a)+Vo)^{\frac{-a}{z-a}} - \frac{z\cdot m}{750} = 0$

Manuelle Auflösung: $\Rightarrow$ $c'(t) = \frac{z\cdot m}{750}\ (t(z-a)+Vo)^{\frac{a}{z-a}} = \frac{z\cdot m}{750}\ r(t)^{\frac{a}{z-a}}$

z*m/750*r (t)^(a/(z-a))->dc (t) $\Rightarrow$ Done

$\int$ (dc (t) ,t) -> c (t) $\Rightarrow$ Done

zeros (yo - (co + c (t))* yh (t), co) | t =0 -> k $\Rightarrow$ $\left\{ \frac{-(m\cdot Vo - 100\cdot yo)\cdot Vo^{\frac{a}{z-a}}}{750} \right\}$

(k[1] + c(t))*yh (t) -> y (t) $\Rightarrow$

$$\frac{\left(m\cdot(t(z-a)+Vo)(t(z-a)+Vo)^{\frac{a}{z-a}} - (m\cdot Vo - 100\cdot yo)\,Vo^{\frac{a}{z-a}} \right)\cdot (t(z-a)+Vo)^{\frac{-a}{z-a}}}{750}$$

Manuelle Vereinfachung :

Allgemeine Lösung : $y(t) = \frac{m}{750}(t(z-a)+Vo) - (\frac{m}{750}Vo - yo)\left(\frac{Vo}{t(z-a)+Vo}\right)^{\frac{a}{z-a}}$

Beispiel : $y(t) = (t + 9000) / 125 + 78\ (1 + t / 9000)^{-9}$

Kontrolle : ***d*** **(** y (t), t **)** - z*m / 750 + a / r (t) * y (t) $\Rightarrow$ 0

4.1.3 Salzen - Entleeren

Für das Volumen und die Salzmenge im Aquarium haben wir im 1. Kapitel folgende Differentialgleichungen erhalten:

Volumen: $V'(t) = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$ mit $V(0) = 900000\ cm^3$

Salzmenge: $S'(t) = -\dfrac{12}{\sqrt{V(t)}} S(t) + 0.54$ mit $S(0) = 54\ kg$

Die Differentialgleichung für die Salzmenge soll nun noch etwas genauer untersucht werden.

Richtungsfeld mit der Lösungskurve für die Startwerte (xt0 , yt0)

Differentialgleichungssystem :

$$x' = -12\sqrt{x(t)} + 18000 = fx(t, x)$$

$$y' = -\frac{12}{\sqrt{x(t)}} y(t) + 0.54 = fy(t, x, y)$$

Programm erzeugen:

- Taste [APPS] 7: Program Editor 3: New... Type: PROGRAM -> Variable: DiffSyst
- Das Programm eintippen

```
DiffSyst (fx, fy, tv, xv, yv,tvon,tbis,yvon,ybis,xt0,yt0)
Prgm

Local dt,dy, dg, mx,my, tx, xx,yy,tt1,tt2,yy1,yy2,
xx1, xx2

tvon -> xmin:  tbis -> xmax
yvon -> ymin : ybis -> ymax
(tbis - tvon ) / 32 -> dt
(ybis - yvon ) / 14 -> dy
dt / 4 -> dg

ClrGraph
xt0->xx
For  tx, tvon,tbis,dt
   For  yy, yvon , ybis, dy
      fy | tv=tx and yv =yy and xv=xx -> m
      Line tx-dg, yy-m*dg, tx+dg, yy+m*dg
   EndFor
   fx | tv=tx and xv=xx->mx
   xx+mx*dt->xx
EndFor

tvon -> tt1:  yt0 -> yy1: xt0->xx1
For tx,tvon,tbis,dt
   fy | tv=tx and yv=yy1 and  xt=xx1-> my
   tx+dt->tt2 :  yy1+ my*dt -> yy2
   Line tt1,yy1,tt2,yy2
   fx | tv= tx  and xv=xx1->mx
   xx1+mx*dt -> xx2; xx2 -> xx1
   tt2 -> tt1 : yy2 -> yy1
EndFor

EndPrgm
```

Aufruf:

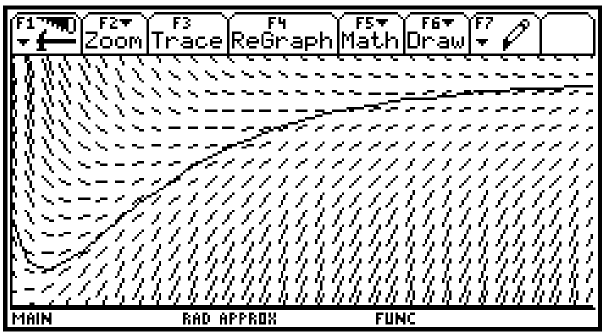
[HOME]

[MODE]
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

DiffSyst (-12*√(x)+ 18000 , -12*y/√(x)+ 0.54, t, x, y, 0,1000, 45, 75, 900000,54)

PARAMETER:

fx	:	Funktionsterm fx (t , x)
fy	:	Funktionsterm fy (t , y)
tv, xv ,yv	:	Funktionsvariablen
[tvon, tbis]	:	t-Bereich
[yvon, ybis]	:	y-Bereich
[xt0, yt0]	:	Startwerte



Hinweis: Verschiedene Lösungskurven kann man dadurch in das gleiche Richtungsfeld zeichnen, indem man das Programm mit verschiedenen Startwerten (xt0, yt0) aufruft.

Exakte Lösungen des allgemeinen Entsalzungsmodells:

Volumen : $V'(t) = -12\sqrt{V(t)} + 18 \cdot 10^3$ mit $V(0) = 900000\ \text{cm}^3$

Separation der Variablen:

($\int$ (1 / (18000-12* √ (v)),v,c) = $\int$ (1, t)) | v < 2250000 $\Rightarrow$ $-250\,(\ln(\sqrt{v}-1500) - \frac{\sqrt{v}}{6} + c = t$

Richtig wäre : $t = -250\ \ln(1500 - \sqrt{v}) - \frac{\sqrt{v}}{6} + c$ d. h. die Bedingung wird nicht berücksichtigt !

solve (-250* ln (1500 - √ (v)) - √ (v) /6 + c = t ,c **)** | t=0 and v = 900000 [ENTER] $\Rightarrow$ c = 1736.19....

Die Gleichung $t = -250\ \ln(1500 - \sqrt{v}) - \frac{\sqrt{v}}{6} + 1736.19$ kann nicht nach v aufgelöst werden. Daher kann man für die Differentialgleichung **keine explizite Lösung** angeben.

Exakte Lösung des Entsalzungsmodells mit Abpumpen:

$s'(t) = \frac{p}{100} \cdot z - \frac{a}{t(z-a)+mo}\, s(t)$; $s(0) = so$ ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung.

Bestimmung der allgemeine Lösung s_h der homogenen Differentialgleichung :

t*(z-a)+mo -> r (t) $\Rightarrow$ Done

solve($\int$ (1 / s , s) = - $\int$ (a/ r (t) , t)), s **)** | s > 0 $\Rightarrow$ $s = (|t(z-a)+mo|)^{\frac{-a}{z-a}}$

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $s_h(t) = co\ \ r(t)^{\frac{-a}{z-a}}$

Bestimmung einer partikulären Lösung s_p der inhomogenen Differentialgleichung :

Ansatz: $s_p(t) = c(t)\, s_h(t)$

r (t)^(-a/(z-a))-> sh (t) $\Rightarrow$ Done

c (t) *sh (t) -> sp (t) $\Rightarrow$ Done

***d* (** sp (t) , t **)** -(z*p/100 - a / r (t) * sp (t))=0 $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}(c(t))\ \ (t(z-a)+mo)^{\frac{-a}{z-a}} - \frac{z \cdot p}{100} = 0$

Manuelle Auflösung: $c'(t) = \frac{z \cdot p}{100}\ \ (t(z-a)+mo)^{\frac{a}{z-a}} = \frac{z \cdot p}{100}\ \ r(t)^{\frac{a}{z-a}}$

z*p/100*r (t)^(a/(z-a))->dc (t) $\Rightarrow$ Done

$\int$ (dc (t) ,t) -> c (t) $\Rightarrow$ Done

zeros (so - (co + c (t))* sh (t), co) | t =0 -> k $\Rightarrow$ $\left\{ \frac{-(p \cdot mo - 100 \cdot so) \cdot mo^{\frac{a}{z-a}}}{100} \right\}$

(k[1] + c(t))*sh (t) -> s (t) $\Rightarrow$

$$\frac{\left(p \cdot (t(z-a)+mo)(t(z-a)+mo)^{\frac{a}{z-a}} - (p \cdot mo - 100 \cdot so)mo^{\frac{a}{z-a}}\right) \cdot (t(z-a)+mo)^{\frac{-a}{z-a}}}{100}$$

Manuelle Vereinfachung :

Allgemeine Lösung : $s(t) = \frac{p}{100}(t(z-a)+mo) - (\frac{p}{100}mo - so)\left(\frac{mo}{t(z-a)+mo}\right)^{\frac{a}{z-a}}$

Beispiel : $s(t) = 27\,(1 + t/450) + 45\,(1 + t/450)^{-3}$

Kontrolle : ***d* (** s (t), t **)** - z*p / 100 + a / r (t) * s (t) $\Rightarrow$ 0

4.2 Projekte mit Lösungsskizzen

Die Projekte werden in Zweiergruppen bearbeitet.

1. ÜBERVÖLKERUNG

Einer Population stehen für die Entwicklung nur beschränkte Ressourcen zur Verfügung. Ihre Maximalgrösse ist M. Wie wächst die Population ?

Modellierung

Anfangsbestand: $N(0) = N_0 = 10^2$

Maximaler Bestand: $M = 500$

Annahme: Der rel. Zuwachs (prozentualer Zuwachs) in einem sehr kleinen Zeitintervall Δt ist proportional zur Länge des Zeitintervalls Δt und proportional zu dem noch verbleibenden "Vermehrungsspielraum". Der Proportionalitätsfaktor ist k = 0.2 pro Stunde.

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{N(t)} \approx k\,(M - N(t))\,\Delta t$$

Mittlere Änderungsrate: $$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} \approx k\,N(t)\,[M - N(t)]$$

Momentane Änderungsrate: $N'(t) = k\,N(t)\,[M - N(t)]$

Exakte Lösung: $$N(t) = \frac{M}{1+\left(\frac{M}{N_0}-1\right)e^{-kMt}}$$

2. GRENZGESCHWINDIGKEIT

Ein Lastwagen fährt mit konstanter Antriebskraft und erfährt einen Luftwiderstand, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist. Wie entwickelt sich die Geschwindigkeit des Lasters? (Nach [7])

Modellierung

Vereinfachung: Der Reibungswiderstand der Räder wird vernachlässigt

Masse des Lasters: 5000 kg

Momentane Beschleunigung: $a(t)$ Momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit

Resultierende Kraft: $F = m\,a(t) = m\,v'(t)$

Konstante Antriebskraft: $K = 10^4\ \mathrm{N}$

Luftwiderstand: $-w\,v^2(t)$; $w = 15\,\mathrm{kg/m}$

Kraftgleichung: $m\,v'(t) = K - w\,v^2(t)$

Differentialgleichung: $v'(t) = \frac{K}{m} - \frac{w}{m}v^2(t)$; $v(0) = 0$

Exakte Lösung: $$v(t) = \sqrt{\frac{K}{w}}\,\frac{1-e^{-2\sqrt{wK}\,t/m}}{1+e^{-2\sqrt{wK}\,t/m}}$$

3. BONBON LUTSCHEN

Wie lange kann man an einem kugelförmigen Bonbon lutschen ? (Nach [7])

Modellierung

Die Volumenabnahme ist in einem kleinen Zeitintervall proportional zur Oberfläche und zur Länge des Zeitintervalls Δt. Das Bonbon bleibt immer eine Kugel.

Anfangsradius des BONBON: $R = 10$ mm

Radius des BONBON zur Zeit t [min]: $r(t)$; $r(0) = R$

Volumenabnahme in Intervall [t, t+Δt]: $V(t+\Delta t) - V(t) \approx -k\ O(t)\,\Delta t$

$k = 1.5$ mm /min

$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \qquad V(t+\Delta t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t+\Delta t)$

$O(t) = 4\pi r^2(t)$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{r^3(t+\Delta t) - r^3(t)}{\Delta t} \approx -3\,k\,r^2(t)$

Substitution: $z(t) = r^3(t)$

$\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \approx -3\,k\ z^{2/3}(t)$

Momentane Änderungsrate: $z'(t) = -3\,k\ z^{2/3}(t)$

Exakte Lösung: $r(t) = R - k\,t$

4. GERÜCHTEVERBREITUNG

Wie breitet sich ein Gerücht in einer Gemeinschaft aus ? (Nach [7])

Modellierung **(** analog Überbevölkerung)

Jede SchülerIn hat in der Zeiteinheit k Kontakte mit MitschülerInnen und erzählt jedesmal das Gerücht weiter. In einem kleinen Zeitintervall ist der Zuwachs von Informierten proportional zu den bereits Informierten, dem Anteil der noch Nichtinformierten und zur Länge des Zeitintervall Δt.

Anzahl SchülerInnen: $N = 1000$

Kontakte pro h: $k = 5\ h^{-1}$

Anzahl Informierte zur Zeit t: $I(t)$; $I(0) = 1$

Anteil Nichtinformierte zur Zeit t: $\frac{N - I(t)}{N}$

Zuwachs an Informierten: $I(t+\Delta t) - I(t) \approx k\ I(t)\,\frac{N - I(t)}{N}\,\Delta t$

Mittlere Änderungsrate: $\frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} \approx k\,I(t) - \frac{k}{N} I^2(t)$

Momentane Änderungsrate: $I'(t) = k\,I(t) - \frac{k}{N} I^2(t)$

Exakte Lösung: $I(t) = \frac{N}{1 + (N-1)\,e^{-k\,t}}$

5. SEDIMENTATION

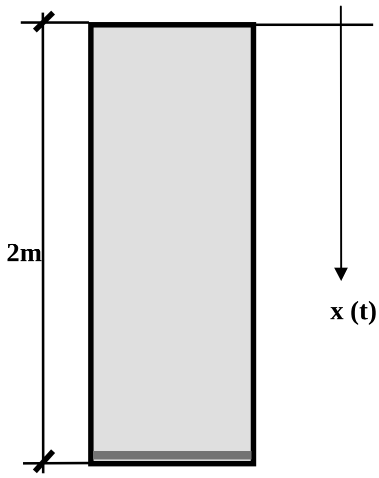
Ein Gefäss wird mit Sandwasser gefüllt. Wann ist es wieder klar ?
(Nach H.E.Donley, The Drag Force on a Sphere, UMAP Module 712, 1992)

Modellierung

Sandhaltiges Wasser wird in einen Behälter der Höhe h=2 m abgefüllt. Es ist abzuschätzen, wie lange es dauert, bis sich der Sand gesetzt hat.
Es werden folgende Annahmen gemacht :

- Die Sandkörner sind kugelförmig mit dem Radius $r = 3 \cdot 10^{-4}$ m (0.3 mm)
- Die Dichte von Sand ist $\rho = 2.5\ 10^3$ kg / m^3
- Die Erdbeschleunigung ist g = 10 m / s^2
- Für den Wasserwiderstand einer Kugel in einer Flüssigkeit gilt das Stokessche Gesetz
  $F = 6\pi\,\eta\, r\, v$ mit der Viskosität für Wasser(20°) $\eta = 10^{-3}$ kg / m s

Wir betrachten die resultierende Kraft, die auf ein Sandkorn wirkt.



Die momentane Beschleunigung zur Zeit t ist die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit: $a(t) = v\,'(t)$

Die resultierende Kraft ist : $F(t) = m\,a(t) = m\,v\,'(t)$

Die resultierende Kraft setzt sich zusammen aus:

- dem Auftrieb (V = Volumen) $- V \cdot 10^3 \cdot g$
- der Schwerkraft ($m = V\rho$) $m\,g = V\rho\, g$
- dem Wasserwiderstand $- 6\pi\,\eta\, r\, v(t)$

Wir erhalten also die Differentialgleichung :

$$m\,v' = V\rho\, g - V10^3\, g - 6\pi\,\eta\, r\, v$$

Wir dividieren beide Seiten durch $m = V\rho$ und setzen für $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ein:

$$v\,' = g\,\frac{\rho - 10^3}{\rho} - \frac{6\pi\, r\,\eta}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}\, v = g\,\frac{\rho - 10^3}{\rho} - \frac{9\,\eta}{2\,r^2\rho}\, v$$

Mit den Annahmen erhalten wir die Differentialgleichung :

$$v\,'(t) = 6 - 20\, v(t) \qquad (1)$$

Für Bestimmung des Ortes eines Sandkorns beachten wir, dass die momentane Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des Ortes ist. Es gilt die Differentialgleichung :

$$x'(t) = v(t) \qquad (2)$$

Eine vernünftige Abschätzung für die Sedimentation bekommt man, wenn man das Verhalten eines Sandkorns betrachtet, das zur Zeit t = 0 an der Wasseroberfläche ist. Für ein solches Sandkorn gilt: $v(0)=0$ und $x(0) = 0$

Approximation mit TI-92 nach Euler-Cauchy

Als Zeitintervall wählen wir [0, 10 s], das wir in N gleichlange Intervalle zerlegen . Von $v(t_0) = v(0) = 0$ und $x(t_0) = x(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von v und x jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Die Berechnung der Funktionswerte verfolgen wir in der Tabelle (TABLE). Lösung ist der Wert von t, bei dem x(t) möglichst nahe bei 2 liegt.

Mit der Differentialgleichung (1) erhalten wir :

$v(t_n) \approx v(t_{n-1}) + v'(t_{n-1})\,\Delta t = v(t_{n-1}) + (6 - 20\,v(t_{n-1}))\,\Delta t$ und $v(t_0) = v(0) = 0$

Mit der Differentialgleichung (2) erhalten wir :

$x(t_n) \approx x(t_{n-1}) + x'(t_{n-1})\,\Delta t = x(t_{n-1}) + v(t_{n-1})\,\Delta t$ und $x(t_0) = x(0) = 0$

$N = 1000 \Rightarrow \Delta t = 1/100;\quad t_n = \Delta t \cdot n = n / 100 \qquad n = 0,1, ...100$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

◆ [Y=]

u1 (n) = n / 100	(Zeit t)
u2(n) = u2(n-1) + (6 - 20*u2(n-1))/100	(Geschwindigkeit v (t))
ui2 = 0	(Startwert u2(0) = v(0)=0)
✔ u3(n) = u3(n-1) + u2(n-1)/100	(Weg x (t))
ui3 = 0	(Startwert u3(0)=x(0)=0)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

◆ [WINDOW]
nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=10 xscl=1 ymin=0 ymax=3 yscl=1

◆ [GRAPH]

◆ [TABLE] [F 2] tblStart : 80 ⇒

n	u1 (=t)	u2 (= v)	u3 (=x)
671	6.71	. 3	1.998
672	6.72	. 3	2.001

Resultat: Es dauert ca. 6.7 s (genauer Wert 6.716 s) bis ein Sandkorn von der Wasseroberfläche auf den Boden des Behälters gesunken ist.

Exakte Lösungen: $v(t) = \frac{3}{10}(1 - e^{-20t})$ $\qquad x(t) = \frac{3}{200}e^{-20t} + \frac{3}{10}t - \frac{3}{200}$

Modellkritik:
- Die Kugelform von Sandkörnern ?
- Wasserwirbel, die kaum zu vermeiden sind, werden nicht berücksichtigt.
- Das "letzte" Sandkorn muss nicht mehr die ganze Höhe zurücklegen.

6. ATOMMÜLL - CONTAINER

Greenpeace protestierte gegen die Versenkung der Atommüll-Container im Meer und behauptete, dass die max. zulässige Aufprallgeschwindigkeit von 12 m s^{-1} in 100 m Tiefe überschritten werde. (Nach [2] und [8])

Modellierung

Grundlagen

Container : m = 240 kg V = 0.21 m^3 Wasserwiderstand: 1.17 v (t)

Erdbeschleunigung: g = 9.81 m s^{-2} Wasserdichte (Salzwasser): ρ = 1025 kg m^{-3}

Für die Bestimmung des Wasserwiderstandes wurden Schleppversuche mit Schiffen durchgeführt.

Wir betrachten die resultierende Kraft, die auf den Container wirkt.

Die momentane Beschleunigung zur Zeit t ist die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit: $a(t) = v'(t)$

Die resultierende Kraft ist : $F(t) = m\,a(t) = m\,v'(t) = 240\,v'(t)$

Die resultierende Kraft setzt sich zusammen aus:

- dem Auftrieb (V = Volumen) $-V\rho g = -0.21 \cdot 1025 \cdot 9.81 = -2111.60$
- der Schwerkraft $m g = 240 \cdot 9.81 = 2354.4$
- dem Wasserwiderstand $-1.17\,v(t)$

Wir erhalten also die Differentialgleichung : $m v' = m g - V \rho g - 1.17 v$

Wir dividieren beide Seiten durch m: $v' = g\left(1 - \frac{V\rho}{m}\right) - \frac{1.17}{m} v$

Mit den Annahmen erhalten wir die Differentialgleichung :

$$v'(t) = 1.0116 - 0.0049\,v(t) \qquad (3)$$

Für Bestimmung des Ortes des Containers beachten wir, dass die momentane Geschwindigkeit die momentane Änderungsrate des Ortes ist. Es gilt die Differentialgleichung :

$$x'(t) = v(t) \qquad (4)$$

Es gilt zudem : $v(0)=0$ und $x(0) = 0$

Exakte Lösungen:

$v(t) = 207.519\,(1 - e^{-0.004875\,t})$

$x(t) = 42568.049\,(e^{-0.004875\,t} - 1) + 207.519\,t = 100 \Rightarrow t = 14.222 \Rightarrow v(14.222) = 13.901$

Approximation mit TI-92 nach Euler-Cauchy

Als Zeitintervall wählen wir [0, 15], das wir in N gleichlange Intervalle zerlegen. Von $v(t_0) = v(0) = 0$ und $x(t_0) = x(0) = 0$ ausgehend, approximieren wir schrittweise die Funktionswerte von v und x jeweils an der nächstfolgenden Stelle. Die Berechnung der Funktionswerte verfolgen wir in der Tabelle (TABLE). Lösung ist der Wert von t, bei dem x(t) möglichst nahe bei 100 liegt.

Mit der Differentialgleichung (3) erhalten wir :

$$v(t_n) \approx v(t_{n-1}) + v'(t_{n-1})\,\Delta t = v(t_{n-1}) + (1.0116563 - 0.004875\, v(t_{n-1}))\,\Delta t \quad \text{und} \quad v(t_0) = v(0) = 0$$

Mit der Differentialgleichung (4) erhalten wir :

$$x(t_n) \approx x(t_{n-1}) + x'(t_{n-1})\,\Delta t = x(t_{n-1}) + v(t_{n-1})\,\Delta t \qquad \text{und} \quad x(t_0) = x(0) = 0$$

$$N = 1000 \Rightarrow \quad \Delta t = 0.015; \qquad t_n = \Delta t \cdot n = 0.015 \cdot n \qquad n = 0,1, ...,100$$

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

◆ [Y=] u1 (n) = 15*n / 1000 (Zeit t)
u2(n) = u2(n-1) + (1. 0116563 - 0. 004875 *u2(n-1))*0.015 (Geschwindigkeit v (t))
ui2 = 0 (Startwert u2(0) = v(0)=0)
✔ u3(n) = u3(n-1) + u2(n-1)*0.015 (Weg x (t))
ui3 = 0 (Startwert u3(0)=x(0)=0)

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

◆ [WINDOW]
nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=15 xscl=1 ymin=0 ymax=110 yscl=10

◆ [GRAPH]

◆ [TABLE] [F 2] tblStart : 945 ⇒

n	u1 (=t)	u2 (= v)	u3 (=x)
948	14. 22	13. 899	99.859
949	14. 235	13. 913	100.07

Resultat: Nach nc = 948 Zeiteinheiten, d. h. nach xc= 14.2 s, prallt der Container mit einer Geschwindigkeit von 13.9 $m\,s^{-1}$ in 100 m Tiefe auf den Meeresboden. Diese Geschwindigkeit übersteigt also die zulässige Aufprall-geschwindigkeit von 12 $m\,s^{-1}$.

7. SCHLEPPKURVE

Ein Tanker und das Schleppschiff liegen im Hafen und sind im Abstand a mit einem straff gespannten Tau miteinander verbunden. Der Schlepper zieht den Tanker senkrecht zum Quai so aus dem Hafen, dass das Tau stets straff gespannt bleibt. (Nach [7])

Modellierung
Das Tau ist immer tangential zur Kurve:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{mit } y(a) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = a \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}$$

8. EIFFELTURM

Der Eiffelturm trägt zuoberst eine Aussichtsplattform und eine Spitze. Warum hat er dann die Form,die er hat ?

Modellierung
Jeder Querschnitt A (x) hat die gleiche Belastung pro Quadratmeter.
σ : Dichte des Säulenmaterials ($kg\ m^{-3}$)
A_0 : oberste Querschnittfläche $\qquad$ G_0 : Masse der Turmspitze

$$(A(x+\Delta x) - A(x))\frac{G_0}{A_0} \approx \sigma A(x)\Delta x \quad \Rightarrow A'(x) = \sigma A(x)\frac{A_0}{G_0} \quad \Rightarrow \quad A(x) = A_0\, e^{A_0 \sigma x / G_0}$$

9. EISVERSORGUNG ALEXANDERS DES GROSSEN * (356-323 v.Chr.)

Alexander der Grosse wollte auch bei seinem Feldzug in den asiatischen Wüsten nicht auf seinen gekühlten Wein verzichten. Er liess sich aus den heimatlichen Bergen Makedoniens kubische Eisblöcke heranschaffen. Konnte das funktionieren ? (Nach [7])

Modellierung
- Isolation mit Heu der Dicke D (50) cm $\qquad$ $\vartheta_A(t)$: Aussentemperatur
- Ursprüngliche Kantenlänge der Eisblöcke: 50 cm $\qquad$ $\vartheta_i(t)$: Temperatur im Innern der Packung
- ursprüngliche Eisoberfläche F $(50 \cdot 50 \cdot 6)\ cm^2$

Fouriersches Wärmeleitungsgesetz
In einem sehr kleinen Zeitintervall Δt gilt für die zugeführte Wärmemenge ΔQ :

$$\Delta Q \approx \lambda \frac{F}{D}[\vartheta_A(t) - \vartheta_i(t)]\Delta t \qquad \text{mit} \qquad \lambda : \text{Wärmeleitfähigkeit von Heu } (3.02 \text{ Joule grad}^{-1}\text{ cm}^{-1}\text{ h}^{-1})$$

Solange das Eis nicht vollständig geschmolzen ist , ist $\vartheta_i(t) = 0$.

Es ist also: $$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda \frac{F}{D}\vartheta_A(t)$$

ANNAHMEN: Temperaturverlauf während eines Tages: $$\vartheta_A(t) = \begin{cases} \frac{40}{8}t & \text{für } 0 \le t \le 8 \\ 60 - \frac{40}{16}t & \text{für } 8 \le t \le 24 \end{cases}$$

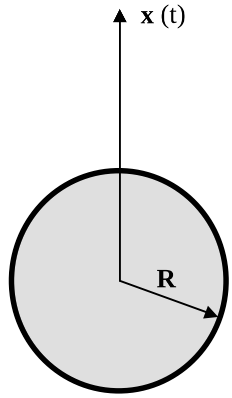
Alternative: Temperaturverlauf während eines Tages: $$\vartheta_A(t) = \begin{cases} 3 \cdot t & \text{für } 0 \le t \le 15 \\ 120 - 5t & \text{für } 15 \le t \le 24 \end{cases}$$

Damit ist die tägliche Wärmezufuhr 434419 Joule. Um ein Gramm Eis zu schmelzen sind 333 Joule erforderlich. Das ergibt pro Tag 1.3 kg Eis , das schmilzt. In ca. 7 Wochen ist der ursprüngliche Würfel erst auf die Hälfte zusammengeschmolzen.

10. SCHUSS IN DEN WELTRAUM : FLUCHTGESCHWINDIGKEIT

Ein Projektil wird auf der Erdoberfläche senkrecht abgeschossen. Wann fällt es nicht mehr auf die Erde zurück ? (Ausführliche Darstellung in [8])

Modellierung



Der Luftwiderstand und andere Störungen werden vernachlässigt.

$x(t)$: Abstand des Projektils vom Erdmittelpunkt zur Zeit t

Mögliche Tips:
- Gleichung mit $2x'$ multiplizieren
- Ansatz: Potenzfunktion
- Energiesatz

DIFFERENTIALGLEICHUNG:

Newtons Grundgesetz
Resultierende Kraft F : $\quad F(x(t), v(t), t) = m x''(t) = m v'(t)$

Gravitationsgesetz
Erdanziehungskraft F: $\quad -\gamma \dfrac{mM}{x^2} = -\dfrac{mg R^2}{x^2}$

γ : universelle Gravitationskonstante mit $\gamma = \dfrac{g R^2}{M}$

R: Erdradius M : Erdmasse

Es gilt also : $\quad m x''(t) = -\dfrac{mg R^2}{x^2} \Rightarrow x'' + \dfrac{g R^2}{x^2} = 0$

LÖSUNG:

a) Differentialgleichung mit 2 x' multiplizieren :

$$2x' x'' = -2x' \frac{g R^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad [(x')^2]' = [2 g R^2 \frac{1}{x}]' \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2 g R^2 \frac{1}{x} + C$$

Mit $v(0) = v_0$ und $x(0) = R$ folgt: $\quad v_0 = 2 g R^2 \dfrac{1}{R} + C \quad \Rightarrow \quad C = v_0^2 - 2 g R$

$$v^2 = 2 g R^2 \frac{1}{x} + v_0^2 - 2 g R$$

Die Geschwindigkeit ist immer positiv , wenn $v_0^2 - 2 g R \geq 0$ ist. Die Fluchtgeschwindigkeit v_0 ist daher :
$v_0 = \sqrt{2 g R} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$.

b) Ansatz : Potenzfunktion $x(t) = A(t+c)^b$ mit $x(0) = R$ in die Diffferentialgleichung einsetzen.
Grund : Wurzelfunktionen ergeben negative Exponenten $\quad (t^{1/2})'' \approx -t^{-3/2}, \; (t^{1/3})'' \approx -t^{-5/3}$
Versuch: $(t^b)'' = -(t^{-2b}) \Rightarrow b = 2/3$

$$x(t) = \sqrt[3]{4.5gR^2\left(t + \sqrt{\frac{R}{4.5g}}\right)^2}$$

Es gilt : $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ dh. das Projektil fällt nicht zurück !

$$x'(0) = v_0 = \sqrt{2 g R} \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

c) Energiesatz: $\quad \dfrac{1}{2} m v^2 - \dfrac{1}{2} m v_0 = \dfrac{m g R^2}{x} - m g R \quad \Rightarrow \quad$ a)

Dass $v_0 \approx 11.2 \text{ km s}^{-1}$ als Fluchtgeschwindigkeit ausreicht, ist damit nachgewiesen. Warum aber bei jeder kleineren Geschwindigkeit das Projektil auf die Erde zurückfällt, ist viel schwieriger zu zeigen.

11. GALILEO GALILEI UND DER FALLSCHIRMSPRINGER

Wie fällt ein Körper aus einer Höhe von 1000 m zur Erde?

Modellierung

a) OHNE LUFTWIDERSTAND

Die Schwerkraft ist in der Nähe der Erdoberfläche konstant.

g: Erdbeschleunigung (9.81 m s^{-2})

x(t) : Höhe zur Zeit t v(t) : Geschwindigkeit zur Zeit t

x(0) = h v(0) = 0

Energiesatz:

Die Änderung der kinetischen Energie ist gleich der Änderung der potentiellen Energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,(x'(t))^2 = mg\,h - mg\,x(t)$$

$$x'(t) = \sqrt{2g\,h - 2g\,x(t)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Newton'sches Kraftgesetz:

$m\,\Delta v(t) \approx m\,g\ \Delta t$

$$v'(t) = g \quad \Rightarrow \quad v(t) = -x'(t) = g\,t \quad \Rightarrow \quad x(t) = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

b) MIT LUFTWIDERSTAND (Fallschirm)

Der Luftwiderstand ist etwa proportional zur Geschwindigkeit, solange diese nicht zu gross ist.

ρ : Luftwiderstandskoeffizient

$$m\,v'(t) = mg - \rho\,v(t) \quad \Rightarrow \quad v'(t) = g - \frac{\rho}{m}v(t)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -x'(t) = \frac{mg}{\rho} - \frac{mg}{\rho}e^{-\frac{\rho}{m}t}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{m^2 g}{\rho^2}(1 - e^{-\frac{\rho}{m}t}) - \frac{mg}{\rho}t + h$$

Approximation:

$$v(t_{n+1}) \approx v(t_n) + v'(t_n)\,\Delta t = v(t_n) + (g - \frac{\rho}{m}v(t_n))\,\Delta t \qquad v(t_0) = 0$$

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) - v(t_n)\,\Delta t \qquad x(t_0) = h$$

h = 1000 g = 9.81 m = 50 ρ= 100 Intervall [0, 200] N = 1000 Δt = 0.2

Einstellung : [MODE] Graph........FUNCTION-> 4: SEQUENCE
[F2] Exact / Approx.... AUTO -> APPROXIMATE

[Y=] u1(n) = 200 *n / 1000
u2(n)=u2(n-1)+ (9.81 - 2*u2(n-1))* 0.2
ui2= 0
✔ u3(n)=u3(n-1) - u2(n-1) *0.2
ui3=1000

[F 7] Axes: Time -> 3: CUSTOM
X Axis: u1
Y Axis: u3

[WINDOW] nmin = 0 nmax=1000 xmin=0 xmax=200
xscl=10 ymin=0 ymax=1000 yscl=100

[GRAPH]

12. EPIDEMIE analog zur Gerüchteverbreitung

Unter den Schülern und Schülerinnen eines Schulhauses breitet sich eine sehr leichte Grippe aus.

Literaturverzeichnis

[1] Bachmann Heinz, Einführung in die Analysis 3, Sabe, 1975
[2] Braun M., Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1979
[3] Burg Klemens / Haf Herbert / Wille Friedrich, Höhere Mathematik für Ingenieure I, B.G Teubner, Stuttgart, 1985
[4] DMK, Analysis, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1989
[5] DMK, Formeln und Tafeln, Orell Füssli Verlag Zürich und Wiesbaden, 1984
[6] Gerthsen Christian, Physik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1966
[7] Heuser Harro, Gewöhnliche Differentialgleichungen , B.G. Teubner Stuttgar, 1989
[8] Kirchgraber Urs, Differentialgleichungen in die Schule, Skriptum Departement Mathematik ETH Zürich, 1994
[9] Preckur Helmuth, Analysis 3, Mentor Verlag, München, 1988
[10] Storrer Hans Heiner, Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986
[11] Strang Gilbert, Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1991
[12] Vogt Herbert, Grundkurs Mathematik für Biologen, B.G. Teubner, Stuttgart, 1983