25. Grundoperationen mit Vektoren

In Schulbüchern werden Vektoren üblicherweise als Spaltenvektoren dargestellt. Darum werden in den Kapiteln 25-30 Beispiele fast ausschliesslich mit Spaltenvektoren gerechnet, obwohl die Befehle für Zeilen- und für Spaltenvektoren funktionieren.

25.1 Einen Vektor eingeben und speichern Spaltenvektor	Speichere den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$: [2; 3; –6] [STO▸] spaltenv [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$
Zeilenvektor	Speichere den Vektor [2, 3, –6]: [2, 3, –6] [STO▸] zeilenv [ENTER] → [2 3 –6] Beim Spaltenvektor steht zwischen den Komponenten des Vektors ein Strichpunkt, beim Zeilenvektor ein Komma.
25.2 Einen Zeilenvektor in einen Spaltenvektor verwandeln und umgekehrt	Verwandle den Vektor zeilenv aus 25.1 in einen Spaltenvektor und den Vektor spaltenv in einen Zeilenvektor: zeilenv^T [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ spaltenv^T [ENTER] → [2 3 –6] Das Zeichen ^{T} wird erzeugt mit [2nd][MATH] 4 1 .
25.3 Komponenten eines Vektors ansprechen ...eines Spaltenvektors ...eines Zeilenvektors	Wie heisst die dritte Komponente des Vektors spaltenv aus 25.1? spaltenv[3, 1] [ENTER] → –6 Der Zusatz [3, 1] bedeutet: 3. Zeile, 1. Spalte Wie heisst die dritte Komponente des Vektors zeilenv aus 25.1? zeilenv[1, 3] [ENTER] → –6 Der Zusatz [1, 3] bedeutet: 1. Zeile, 3. Spalte
25.4 Grundoperationen mit Vektoren Summe	Addiere die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [0; 6; –1]+[3; –6; 5] [ENTER] → $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
Differenz	Subtrahiere von $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [0; 6; –1]–[3; –6; 5] [ENTER] → $\begin{bmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$

Vielfaches	Verdopple den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$: 2*[0; 6; –1] [ENTER] → $\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$
Bruchteil	Drittle den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$: [3; –6; 5]/3 [ENTER] → $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5/3 \end{bmatrix}$
25.5 Länge eines Vektors	Wie lang ist der Vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$? norm([2; 3; –6]) [ENTER] → 7
25.6 Länge der Strecke AB	Welches ist der Abstand der Punkte A(3, 2, 1) und B(4, –2, 9)? [3; 2; 1] [STO▸] a [ENTER] → $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ [4; –2; 9] [STO▸] b [ENTER] → $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$ norm(b–a) [ENTER] → 9 ☝ Der Einsatz von norm in Gleichungen kann zu Problemen führen; → Schwierigkeiten und Probleme, Nr. 1 weiter unten in diesem Kapitel.
25.7 Einen Vektor auf Länge 1 strecken / stauchen	Stauche den Vektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ auf Länge 1: unitv([2; 3; –6]) [ENTER] → $\begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}$
25.8 Haben zwei Vektoren gleiche / entgegengesetzte Richtung?	Haben $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung?

[3;2;–6]./[–6;–4;12] [ENTER] → $\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

Die Antwort ist ja, weil der Resultatvektor dreimal dieselbe Zahl enthält. Und da diese Zahl negativ ist, haben die Vektoren entgegengesetzte Richtung.

Der Befehl ./ führt eine komponentenweise Division durch.

25.9 Einen Vektor zerlegen

Zerlege den Vektor $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$:

1. Weg: Gleichung mit Vektoren

solve(x*[4; 0; 2] + y*[–1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [–6; 0; 0], {x, y, z}) [ENTER] → x=1 and y=3 and z=–1

Interpretation: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Weg: Mit Matrizenoperationen

augment(augment(augment([4; 0; 2], [–1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [–6; 0; 0]) [STO▸] matrix [ENTER] →

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

rref(matrix) [ENTER] → $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

In der hintersten Spalte stehen die gesuchten Faktoren: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

25.10 Abklären, ob Vektoren linear unabhängig sind oder nicht

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 25.9 findet man als *einzige* Zerlegung $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$, d.h. die drei Vektoren sind linear unabhängig.

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

Dazu zerlegt man den Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$. Gemäss 25.9 findet man:

1. Weg:
solve(x*[4; 0; 2] + y*[1; 2; 1] + z*[7; 6; 5] = [0; 0; 0], {x, y, z}) ENTER → x= –@1 and y= –3·@1 and z=@1
Wie man am Symbol @1 erkennt, hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Deshalb sind die Vektoren linear abhängig.
Eine mögliche Zerlegung ist

$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=(-1)\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$.

2. Weg:
augment(augment(augment([4; 0; 2], [1; 2; 1]), [7; 6; 5]), [0; 0; 0]) STO▸ matrix ENTER →

$\begin{bmatrix}4&1&7&0\\0&2&6&0\\2&1&5&0\end{bmatrix}$

rref(matrix) ENTER → $\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Weil die letzte Zeile (!) ausschliesslich aus Nullen besteht, sind die drei Vektoren linear abhängig.

Schwierigkeiten und Probleme

1. Welcher Punkt P(x, y) hat sowohl von A(–2, 2) als auch von B(5, 1) den Abstand 5?	Lösung: $P_1(1, -2)$, $P_2(2, 5)$
[–2; 2] [STO▸] a [ENTER] →	$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$
[5; 1] [STO▸] b [ENTER] →	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
[x; y] [STO▸] p [ENTER] →	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
solve(norm(p–a)=5 and norm(p–b)=5, {x, y}) [ENTER] →	x=1. and y=–2. Warning: More solutions may exist

Es wird nur P_1 gefunden. Abhilfe: Quadrieren der Gleichungen.

solve(norm(p–a)^2=25 and norm(p–b)^2=25, {x, y}) [ENTER] →	x=1 and y=–2 or x=2 and y=5 Note: Domain of result may be larger

2. Welcher Punkt P(x, y) hat von den Punkten A(5, 7), B(–1, –1) und C(6, 0) denselben Abstand r?	Lösung: P(2, 3), r=5
[5; 7] [STO▸] a [ENTER] →	$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$
[–1; –1] [STO▸] b [ENTER] →	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$
[6; 0] [STO▸] c [ENTER] →	$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$
[x; y] [STO▸] p [ENTER] →	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
solve(norm(p–a)=r and norm(p–b)=r and norm(p–c)=r, {x, y, r}) [ENTER] →	$r=\sqrt{y^2+16.}$ and x=2. and y=3. Warning: More solutions may exist

Weshalb wird r nicht vollständig berechnet? Interessanterweise klappt nämlich alles, wenn man den Abstand mit d bezeichnet:

solve(norm(p–a)=d and norm(p–b)=d and norm(p–c)=d, {x, y, d}) [ENTER] →	x=2. and y=3. and d=5. Warning: More solutions may exist