7. Lösen von Gleichungssystemen

7.1 Ein lineares Gleichungssystem lösen

Alle Lösungen suchen

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{r} x + 2ay = 1 \\ 3x + 4ay = 0 \end{array} \right|$$

nach x und y auf:

1. Weg:

solve(x+2*a*y=1 and 3*x+4*a*y=0, {x,y}) [ENTER] →

x=–2 and y= $\frac{3}{2 \cdot a}$

2. Weg: Dazu müssen alle Gleichungen so umgeformt werden, dass auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens 0 steht:

$$\left| \begin{array}{r} x + 2ay - 1 = 0 \\ 3x + 4ay = 0 \end{array} \right|$$

zeros({x+2*a*y–1, 3*x+4*a*y}, {x, y}) [ENTER] →

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2 \cdot a} \end{bmatrix}$$

Interpretation: x=–2, y= $\frac{3}{2 \cdot a}$

Spezialfälle:
...keine Lösung

Löse das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{r} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 9 \end{array} \right|$:

1. Weg:

solve(x+y=4 and 2*x+2*y=9, {x, y}) [ENTER] →
false

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

2. Weg:

zeros({x+y–4, 2*x+2*y–9}, {x, y}) [ENTER] → { }

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

...unendlich viele Lösungen

Löse das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{r} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{array} \right|$:

1. Weg:

solve(x+y=4 and 2*x+2*y=8, {x, y}) [ENTER] →

x=–(@1–4) and y=@1

Anstelle von @1, @2 etc. kann eine beliebige *reelle* Zahl eingesetzt werden. Im Beispiel ist y also beliebig und x = –(y–4).

2. Weg:

zeros({x+y–4, 2*x+2*y–8}, {x, y}) [ENTER] →

[–(@1–4) @1]

Interpretation: x=–(y–4) und y=beliebig

7.2 Ein nichtlineares Gleichungssystem lösen

Alle Lösungen suchen

Löse das nichtlineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{c} 3b^2x^2 = 4a^2by \\ \frac{bx}{2} = \frac{ay}{3} \end{array} \right|$$

nach x und y auf:

1. Weg:

solve(3*b^2*x^2=4*a^2*b*y and b*x/2=a*y/3, {x, y}) ENTER → x=2·a and y=3·b or x=@1 and y=0 and b=0 or x=@3 and y=@2 and a=0 and b=0 or x=0 and y=0

Interpretation ("or" trennt zwei Lösungen):
x_1=2a, y_1=3b
wenn b=0: x_2 ist beliebig, y_2=0
wenn a=b=0: x_3 ist beliebig, y_3 ist beliebig
x_4=0, y_4=0

2. Weg:

zeros({3*b^2*x^2–4*a^2*b*y, b*x/2–a*y/3}, {x, y}) ENTER →

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \text{when}(a=0 \text{ and } b=0, @6) & \text{when}(a=0 \text{ and } b=0, @5) \\ \text{when}(b=0, @4) & \text{when}(b=0, 0) \\ 2\cdot a & 3\cdot b \end{bmatrix}$$

Interpretation: Jede Zeile gibt eine Lösung an.
x_1=0, y_1=0 (Zeile 1)
wenn a=b=0: x_2 ist beliebig, y_2 ist beliebig (Zeile 2)
wenn b=0: x_3 ist beliebig, y_3=0 (Zeile 3)
x_4=2a, y_4=3b (Zeile 4)

Spezialfälle

Auch hier können als Lösungen true, false und Resultate mit @1, @2 etc. auftreten. Anstelle von @1 etc. kann eine beliebige *reelle* Zahl eingesetzt werden.

7.3 Die Lösungen kontrollieren

Erfüllen die Zahlenpaare x=–2, y=$\frac{3}{2a}$ und x=–1, y=$\frac{3}{2a}$ das Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} x + 2ay &= 1 \\ 3x + 4ay &= 0 \end{aligned} \right| ?$$

x+2*a*y=1 and 3*x+4*a*y=0| x=–2 and y=3/(2*a) ENTER → true

Note: Domain of result may be larger

Die fraglichen Terme erfüllen das Gleichungssystem.

x+2*a*y=1 and 3*x+4*a*y=0| x=–1 and y=3/(2*a) ENTER → false

Note: Domain of result may be larger

Die fraglichen Terme erfüllen das Gleichungssystem nicht.

7.4 Die Lösungssuche abbrechen

Brich die Lösung einer Gleichung oder einen anderen zeitaufwendigen Vorgang ab:

→ 6.3

7.5 Ein Gleichungssystem schrittweise lösen

Löse das Gleichungssystem

$$\left| \begin{aligned} x + 2ay &= 1 \\ 3x + 4ay &= 0 \end{aligned} \right|$$

schrittweise nach dem Additionsverfahren und nach dem Einsetzverfahren:

	Additionsverfahren: x+2*a*y=1 [STO▸] zeile1 [ENTER] → $x+2\cdot a\cdot y=1$ 3*x+4*a*y=0 [STO▸] zeile2 [ENTER] → $3\cdot x+4\cdot a\cdot y=0$ zeile2–3*zeile1 [ENTER] → $-2\cdot a\cdot y=-3$ ans(1)/(–2*a) [ENTER] → $y=\frac{3}{2\cdot a}$ Note: Domain of result may be larger zeile2–2*zeile1 [ENTER] → $x=-2$ *Einsetzverfahren:* x+2*a*y=1 [STO▸] zeile1 [ENTER] → $x+2\cdot a\cdot y=1$ 3*x+4*a*y=0 [STO▸] zeile2 [ENTER] → $3\cdot x+4\cdot a\cdot y=0$ solve(zeile1, x) [ENTER] → $x=1-2\cdot a\cdot y$ zeile2 | ans(1) [ENTER] → $3-2\cdot a\cdot y=0$ solve(ans(1), y) [ENTER] → $y=\frac{3}{2\cdot a}$ ans(3) | ans(1) [ENTER] → $x=-2$