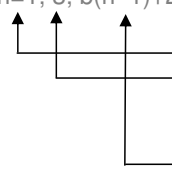



14. Folgen und Reihen, Grenzwerte	
<p>14.1 Eine Folge definieren Explizite Definition</p> <p>Rekursive Definition</p>	<p>Definiere die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2n + 1$: 2^*n+1 [STO] a(n) [ENTER] → Done</p> <p>Definiere die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n = \begin{cases} 3, & \text{falls } n = 1 \\ b_{n-1} + 2 & \text{sonst} \end{cases}$: when(n=1, 3, b(n-1)+2) [STO] b(n) [ENTER] → Done</p>  <p>Bedingung So wird b_n berechnet, wenn n die Bedingung erfüllt. So wird b_n berechnet, wenn n die Bedingung nicht erfüllt.</p>
<p>14.2 Glieder einer vorher definierten Folge berechnen Ein Glied Mehrere Glieder</p>	<p>Berechne das 7. Glied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: a(7) [ENTER] → 15</p> <p>Berechne die Glieder mit den Nummern 3 bis 6 der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: 1. Weg: a(n) n={3, 4, 5, 6} [ENTER] → {7 9 11 13} 2. Weg: seq(a(i), i, 3, 6) [ENTER] → {7 9 11 13}</p> <p> Bei rekursiver Definition führt der erste Weg oft zu einem Memory-Error.</p>
<p>14.3 Eine Folge definieren und einige Glieder berechnen</p>	<p>Berechne von der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 2n + 1$ die Glieder mit den Nummern 3 bis 7 seq(2^*n+1, n, 3, 7) [ENTER] → {7 9 11 13 15}</p>
<p>14.4 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge zusammenzählen: $\sum_{i=1}^n a_i$</p>	<p>Zähle alle Glieder der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i = 2i + 1$ zusammen, deren Index i zwischen 1 und n liegt: $\Sigma(a(i), i, 1, n)$ [ENTER] → $n^2 + 2n$ Das Zeichen Σ wird auf dem Voyage 200 erzeugt mit [2nd][Σ], auf dem TI-89 Titanium mit [F3]4 .</p> <p>Addiere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $c_i = \frac{1}{2^i}$: $\Sigma(1/(2^i), i, 1, \infty)$ [ENTER] → 1 Das Zeichen ∞ befindet sich beim Voyage 200 oberhalb der Taste J, beim TI-89 Titanium oberhalb der Taste [CATALOG].</p>
<p>14.5 Einige oder unendlich viele Glieder einer Folge multiplizieren: $\prod_{i=1}^n a_i$</p>	<p>Multipliziere alle Glieder der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i = 2^i + 1$, deren Index i zwischen 3 und 8 liegt: $\Pi(a(i), i, 3, 8)$ [ENTER] → 2297295 Das Zeichen Π wird erzeugt mit [F3]5 .</p> <p>Multipliziere alle Glieder der Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $c_i = \frac{1}{2^i}$: $\Pi(1/2^i, i, 1, \infty)$ [ENTER] → 0</p>

14.6 Die Wertetabelle für eine oder mehrere Folgen aufstellen

Vorbereitung

Folge(n) definieren

n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen

Tabelle berechnen

Rückkehr zum Home-Screen

Vorbereitung

Erzeuge eine Wertetabelle für die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ und die rekursiv definierte Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $v_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ v_{n-1} + n & \text{sonst} \end{cases}$

1. Weg (auch für mehrere Folgen geeignet):

1. Schritt: Den Rechner auf Folgen vorbereiten

[MODE]

Graph ... SEQUENCE **[ENTER]** (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)

2. Schritt: Die Folgen definieren und auswählen

[Y=]

Eventuell vorhandene alte Folgen können gelöscht werden mit **[F1] 8 [ENTER]**

Explizit definierte Folge eingeben:

$u1(n) = n^2/2 - n$ **[ENTER]**

ui1 = nichts eingeben

Rekursiv definierte Folge eingeben:

$u2(n) = u2(n-1) + n$ **[ENTER]**

ui2 = 1 **[ENTER]**

Folgen, vor deren Gleichung ein \checkmark steht, werden berechnet. Das \checkmark kann mit **[+]** und **[F4]** gesetzt bzw. gelöscht werden.

3. Schritt: Die gewünschten n-Werte angeben

[TblSet]

tblStart: 1 **[v]**

Δ tbl: 1 **[ENTER] [ENTER]**

(Diese Angaben müssen nicht jedes Mal eingegeben werden.)

4. Schritt: Die Tabelle ausgeben

[TABLE] **[>]**

n	u1	u2
1.	-.5	1.
2.	0.	3.
3.	1.5	6.
4.	4.	10.
5.	7.5	15.
6.	12.	21.
7.	17.5	28.
8.	24.	36.

n=1.
RAD AUTO SEQ

Mit **[+]** können weitere Werte angezeigt werden.

Mit **[F2]** können die n-Werte geändert werden, wie beim 3. Schritt beschrieben.

Voyage 200: **[HOME]**

TI-89 Titanium: **[HOME]**

2. Weg:

Berechne einige Glieder der Folge $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:

1. Schritt: Rechner auf Funktionen (!) vorbereiten

[MODE] Graph ... FUNCTION **[ENTER]** (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)

n-Werte angeben, die in der Tabelle erscheinen sollen

Tabelle berechnen

Rückkehr zum Home-Screen

Gezielt einige Glieder berechnen

14.7 Eine Folge graphisch darstellen

Vorbereitung

Folge(n) definieren

2. Schritt: Gewünschte n-Werte angeben

\blacklozenge [TblSet]

tblStart: 0 \blacktriangledown

Δ tbl: 1 [ENTER] [ENTER]

(Diese Angaben sind nicht jedes Mal nötig.)

3. Schritt: Tabelle ausgeben

table n²/2-n, n [ENTER] \rightarrow

x	1
0.	0.
1.	-0.5
2.	0.
3.	1.5
4.	4.
5.	7.5
6.	12.
7.	17.5

Mit \oplus können weitere Werte angezeigt werden.

Mit [F2] können die n-Werte geändert werden, wie beim 2. Schritt beschrieben.

Voyage 200: \blacklozenge [HOME]

TI-89 Titanium: [HOME]



Der Befehl table n²/2-n, n funktioniert *nicht*, wenn der Graphik-Modus auf sequence eingestellt ist (\rightarrow 1. Schritt).

3. Weg (etwas unübersichtlich, aber schnell):

Berechne einige Glieder der Folge $a_n = \frac{n^2}{2} - n$:

n²/2-n | n={1, 10, 20, 30, 50} [ENTER] \rightarrow

{-1/2 40 180 420 1200}

Erzeuge die Graphen für die explizit definierte

Folge $u_n = \frac{n^2}{2} - n$ und die rekursiv definierte Folge

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1 \\ v_{n-1} + n & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Schritt: Rechner auf Folgen vorbereiten

[MODE] Graph ... SEQUENCE [ENTER] (muss nicht jedes Mal eingestellt werden)

2. Schritt: Folgen definieren und auswählen

\blacklozenge [Y=]

Eventuell vorhandene alte Folgen können gelöscht werden mit [F1] 8 [ENTER]

Explizit definierte Folge eingeben:

u1(n)=n²/2-n [ENTER]

u1= nichts eingeben

Rekursiv definierte Folge eingeben:

u2(n)=u2(n-1)+n [ENTER]

u2=1

Folgen, vor denen ein \checkmark steht, werden berechnet. Das \checkmark kann mit \oplus und [F4] gesetzt bzw. gelöscht werden.

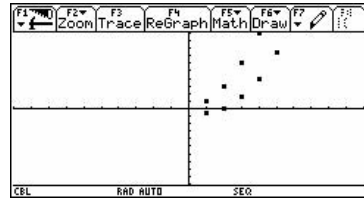
Graph(en) zeichnen

Änderung des dargestellten Ausschnittes

Rückkehr zum Home-Screen

3. Schritt: Graphen darstellen

◊ [GRAPH] →



Stelle einen anderen Ausschnitt des Graphen dar:

1. Weg: [F2]

- 1: Schränke den dargestellten Ausschnitt mit den Tasten ◊ und [ENTER] auf einen rechteckigen Bereich ein.
 - 2: Stelle einen 4-mal kleineren Ausschnitt dar.
 - 3: Stelle einen 4-mal grösseren Ausschnitt dar.
 - 5: 1 Einheit auf der n-Achse ist gleich lang wie 1 Einheit auf der u-Achse.
 - 6: Stelle den Standardausschnitt dar:
n-Werte: 1...10, von n=1 an wird für jedes Folgenglied ein Punkt gezeichnet.
x-Werte: -10...10, 1 Markierung = 1 Einheit
y-Werte (u-Werte): -10...10, 1 Markierung = 1 Einheit
- A: Bestimmt den y-Bereich so, dass der Graph für den gewählten x-Bereich vollständig angezeigt wird.

2. Weg: ◊ [WINDOW]

Der Ausschnitt kann auch direkt eingegeben werden. Es bedeuten:

- nmin: kleinster Wert von n (erstes Glied der Folge)
- nmax: grösster Wert von n (letztes Glied der Folge)
- plotstrt: kleinstes n, für das u_n gezeichnet werden soll
- plotstep: Für jedes wievielte n soll u_n gezeichnet werden?
- xmin: kleinster x-Wert des Ausschnittes
- xmax: grösster x-Wert des Ausschnittes
- xscl: Abstand zwischen zwei Markierungen auf der x-Achse
- ymin: kleinster y-Wert des Ausschnittes
- ymax: grösster y-Wert des Ausschnittes
- yscl: Abstand zwischen zwei Markierungen auf der y-Achse

Voyage 200: ◊ [HOME]**TI-89 Titanium:** [HOME]

<p>14.8 Die Beschränktheit einer Folge untersuchen Gegen oben</p> <p>Gegen unten</p>	<p>Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen oben beschränkt? Welches ist allenfalls eine obere Schranke?</p> <p>$4 - 2 * n$ [STO] $a(n)$ [ENTER] → Done $fmax(a(n), n) n >= 1$ [ENTER] → $n = 1$ $a(n) ans(1)$ [ENTER] → 2 Die Folge ist gegen oben beschränkt, und 2 ist eine obere Schranke.</p> <p>Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 4 - 2n$ gegen unten beschränkt? Welches ist allenfalls eine untere Schranke?</p> <p>$4 - 2 * n$ [STO] $a(n)$ [ENTER] → Done $fmin(a(n), n) n >= 1$ [ENTER] → $n = \infty$ $a(n) ans(1)$ [ENTER] → $-\infty$ Die Folge ist nicht gegen unten beschränkt.</p>
<p>14.9 Den Grenzwert einer Folge berechnen</p>	<p>$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right) = ?$</p> <p>limit($1 + (3/4)^n$, n, ∞) [ENTER] → 1</p> <p>☞ Die Resultate des Taschenrechners sind mit Vorsicht zu geniessen; → Schwierigkeiten und Probleme, Nr. 5 und 6.</p> <p>☞ undef hat bei Grenzwerten zwei verschiedene Bedeutungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> – Der Limes existiert nicht, oder – der Taschenrechner findet den Limes nicht.

 **Schwierigkeiten und Probleme**

1. Vereinfache: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ Lösung: $\infty, \ln 2, \pi/4, \pi^2/12$

$\Sigma(1/k, k, 1, \infty)$ [ENTER] → $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)$

$\Sigma((-1)^{(k+1)}/k, k, 1, \infty)$ [ENTER] → $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k} \right)$

$\Sigma((-1)^k/(2*k+1), k, 0, \infty)$ [ENTER] → $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{2 \cdot k + 1} \right)$

$\Sigma((-1)^{(k+1)}/k^2, k, 1, \infty)$ [ENTER] → $-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k^2} \right)$

Keine dieser Reihen wird erkannt.

2. $a_n := \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}, a_{k+1} - a_k = ?$ Lösung: $\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k+1}$

$\Sigma(1/i, i, n+1, 2*n)$ → $a(n)$ [ENTER] → Done

$a_{(k+1)} - a_{(k)}$ [ENTER] →

$$\sum_{i=k+2}^{2 \cdot (k+1)} \left(\frac{1}{i}\right) - \sum_{i=k+1}^{2k} \left(\frac{1}{i}\right)$$

Der Term wird nicht ausgewertet.

3. Berechne $\sum_{n=0}^{\infty} v^n$ für $|v| < 1$ und $0 < v < 1$

Lösung: $\frac{1}{1-v}, \frac{1}{1-v}$

$\Sigma(v^n, n, 0, \infty) | v > -1$ and $v < 1$ [ENTER] →

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v^n)$$

$\Sigma(v^n, n, 0, \infty) | v > 0$ and $v < 1$ [ENTER] →

$$\frac{-1}{v-1}$$

Bei der ersten Aufgabe erhält man ein wenig hilfreiches Resultat.

4. Vereinfache:

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{100} c^k \text{ für } c \neq 1$$

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$$\sum_{k=0}^n c^k$$

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}$$

Werte das Resultat der zweiten Aufgabe aus für $n=100$.

$$\frac{c^{101} - 1}{c - 1}$$

$\Sigma(c^k, k, 0, 100) | c=1$ [ENTER] →

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

$\Sigma(c^k, k, 0, n)$ [ENTER] →

$$\frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} - \frac{1}{c - 1}$$

$\text{ans}(1) | n=100$ [ENTER] →

$$c^{100} + c^{99} + c^{98} + c^{97} + c^{96} + c^{95} + c^{94} + \dots$$

Note: Domain of result may be larger

Wann wird die Summe zusammengefasst?

5. Vereinfache:

Lösung:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls $n < m$

0

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m}$, falls $n > m$

∞

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, falls $x = -1$

$\frac{1}{2}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n} + 1}$, falls $x < -1$

0

a) $\text{limit}(x^n / x^m, x, \infty) | n < m$ [ENTER] →

undef

b) $\text{limit}(x^n / x^m, x, \infty) | n > m$ [ENTER] →

undef

c) $\text{limit}(1/(x^{2n}+1), n, \infty) | x = -1$ [ENTER] →

undef

d) $\text{limit}(1/(x^{2n}+1), n, \infty) | x < -1$ [ENTER] →

Error: Non-real result

Abhilfe: Man kann versuchen, n und m als @n1 und @n2 zu bezeichnen:

c) $\text{limit}(1/(x^{2*@n1}+1), @n1, \infty) | x = -1$ [ENTER] → $\frac{1}{2}$

Bei den anderen drei Beispielen klappt dieser Trick freilich nicht.

14. Folgen und Reihen, Grenzwerte

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{20n}\right)^n$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{.05 \cdot t}{n}\right)^n$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{.04 \cdot t}{n}\right)^n$

Lösungen: $e^{\frac{t}{20}}$ $e^{0.05t} \approx 1.0513^t$

$e^{0.04t} \approx 1.04081^t$

limit((1+(t/20)/n)^n, n, ∞) [ENTER] →

limit((1+(0.05*t)/n)^n, n, ∞) [ENTER] →

Dieses Resultat ist falsch.

limit((1+(0.04*t)/n)^n, n, ∞) [ENTER] →

Wann gelingt die Lösung, wann nicht?

$e^{\frac{t}{20}}$

0

$(1.04081)^t$